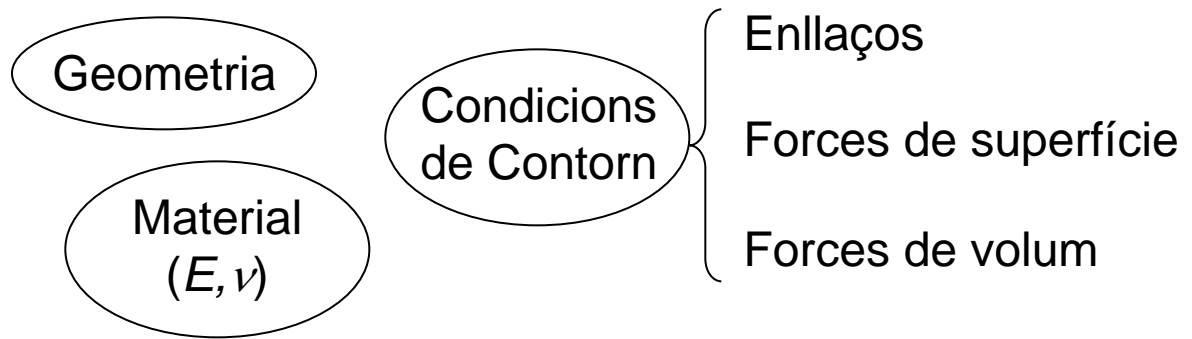




TEMA 5. ELASTICITAT LINEAL

5.1. Plantejament del Problema Elàstic



INCÒGNITES

$[\sigma]$	6
$[\varepsilon]$	6
\vec{u}	3
<hr/>	
	15

EQUACIONS

- Per al tensor tensió:
3 Eq. d'equilibri (interior o superfície)
- Per al model de material:
6 Relacions $[\sigma] \leftrightarrow [\varepsilon]$ (Hooke, Lamé)
- Per a deformacions o desplaçaments:
6 Condicions de compatibilitat i 6 relacions cinemàtiques

15



5.2. Mètodes de Resolució

Mètodes Analítics

Generals
Teoria de la Elasticitat

Directe
Semi-invers
Invers

Particulars
Resistència de Materials

Barres
Plaques
Membranes
Estructures de barres

Mètodes Numèrics

Diferències Finites

Elements Finites

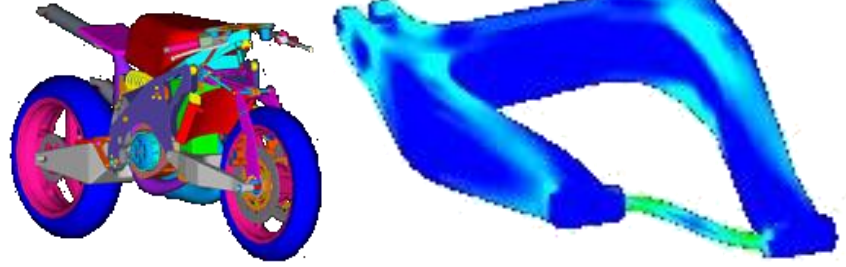
Elements de Contorn

Mètodes Experimentals

Fotoelasticitat
Extensometria Elèctrica
Correlació d'imatge Digital (DIC)
Moiré



Simulació numèrica



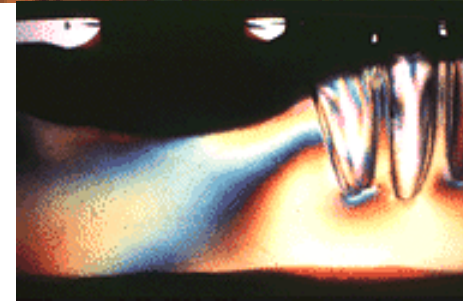
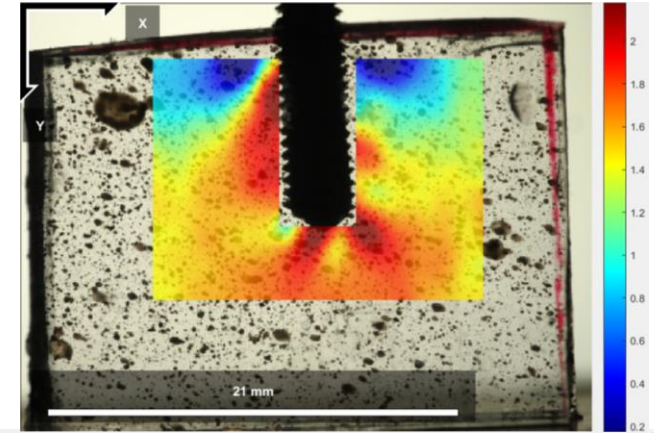
Fotoelasticitat



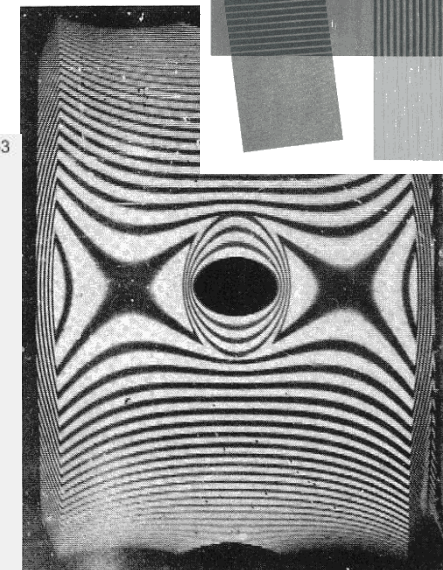
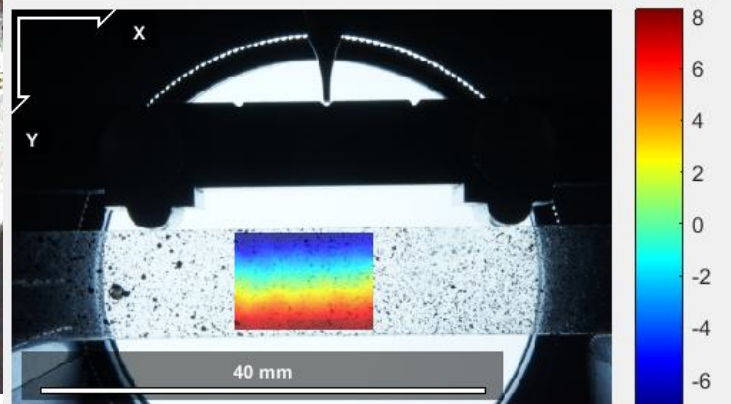
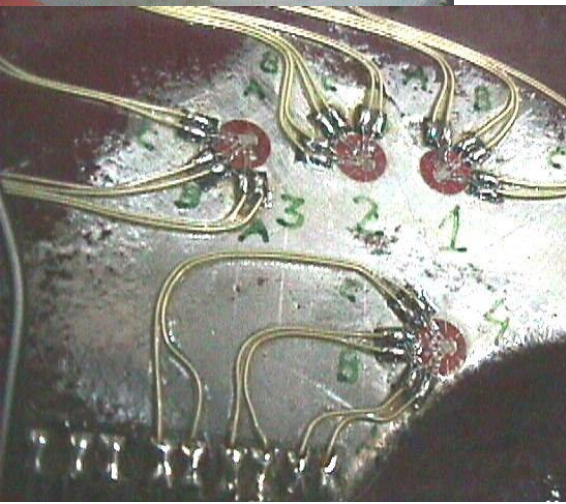
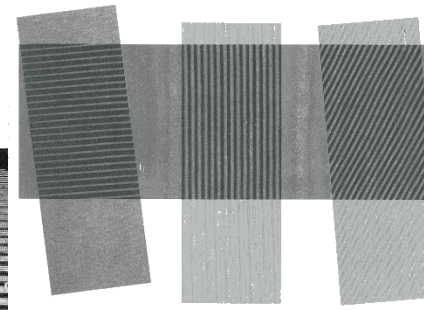
Extensometria elèctrica



Correlació digital d'imatge

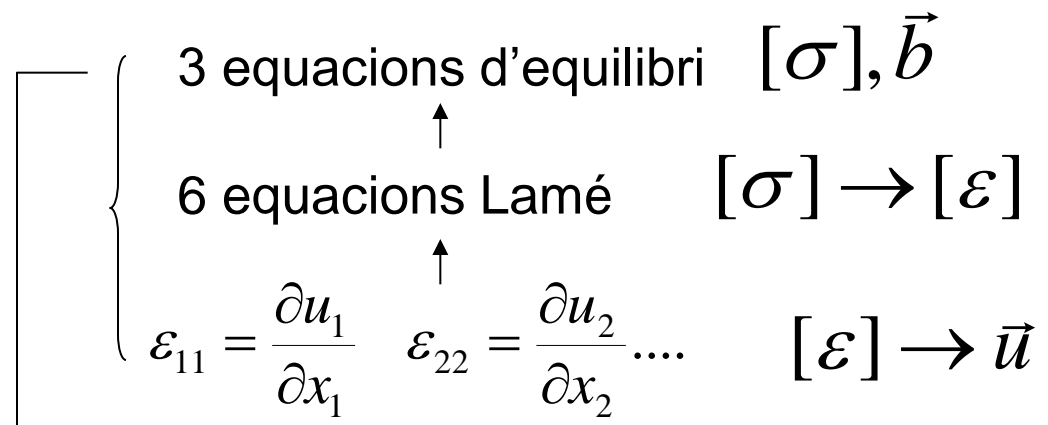


Moiré





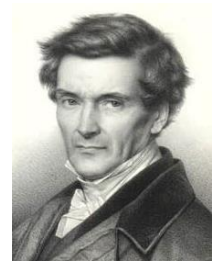
Mètode Directe: \vec{u} Incògnites



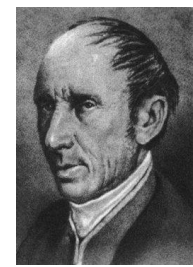
Equació de Navier-Cauchy

$$(\lambda + G) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) + G \Delta \vec{u} + \vec{b} = 0$$

+ Verificar condicions de contorn



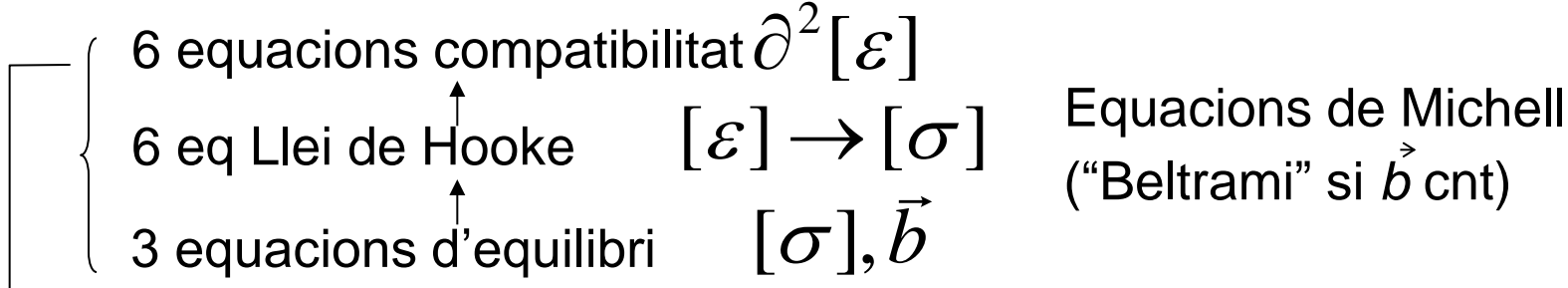
Claude-Louis Navier
1785-1836
Matemàtic i Enginyer Francès



Augustin-Louis Cauchy
1789-1857
Matemàtic Francès



Mètode Semi-invers: σ Incògnites



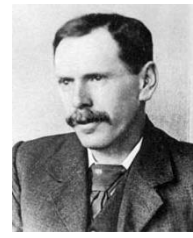
$$\Delta \sigma_{ii} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \Delta I_1 + 2 \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3 \text{ eq})$$

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + \frac{\partial b_j}{\partial x_i} = 0 \quad (3 \text{ eq})$$

+ Verificar condicions de contorn

Mètode Invers:

Suposar la solució $[\varepsilon] \rightarrow [\sigma] \rightarrow \vec{u}$ i verificar les equacions
 \rightarrow (p.ex. Funció d'Airy)



John Henry Michell
1863 - 1940
Matemàtic australià



Eugenio Beltrami
1835 - 1900
Matemàtic italià



Sir George Biddell Airy
1801-1892
Astrònom i Matemàtic Anglès

5.3. Elasticitat bidimensional

Tensió Plana

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} \quad \text{No depenen de } x_3$$

Llei de Hooke Generalitzada:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11})$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

Tensió Plana

Llei de Hooke Generalitzada

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ \sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

Tensió Plana

Equacions de Lamé

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ \sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & d_2 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$



Tensió Plana

Condicions de Superfície

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 &= f_1 \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 &= f_2 \\ 0 &= f_3 \end{aligned} \right\}$$

Condicions d'Equilibri

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + b_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + b_2 &= 0 \\ b_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Condicions de Compatibilitat (2 eq. 0 = 0)

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$



Activitat 5.1a
a) Tensió plana
Entregable 13
(límit 1 setmana)

MECÀNICA DE MEDIS CONTINUS

Permutació 1

Temps 60 min

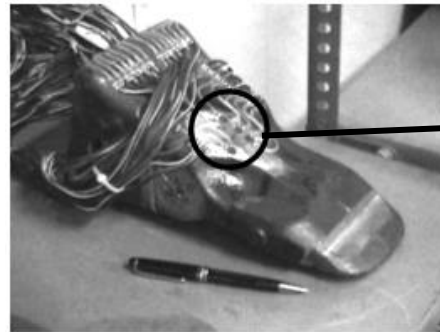
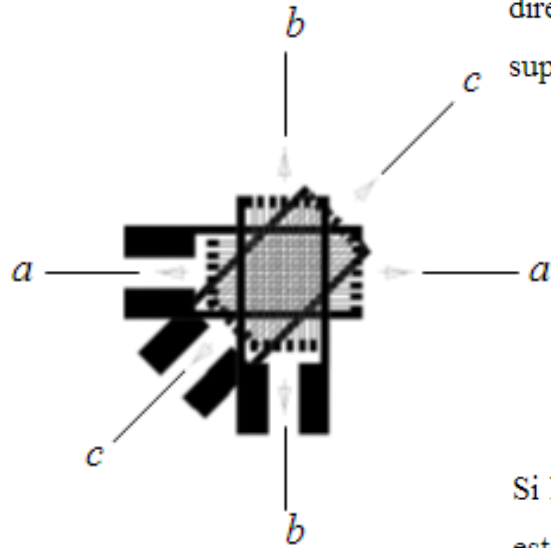
PROBLEMA 2

Punts 10

18.06.04

Pes: 1

Una "roseta" de galgas es un dispositiu constituïdo por tres galgas extensomètriques superpuestas cuyas lecturas proporcionan las tres deformaciones longitudinales unitarias correspondientes a dos direcciones perpendiculares y su bisectriz. Se han pegado rosetas en determinados puntos de la superficie libre del diente de una pala excavadora para evaluar las causas de su rotura.



Si las lecturas de una de las rosetas y las propiedades del material son las indicadas, se pide, para este punto:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= 887,50 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_b &= -720,83 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_c &= 547,62 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 210\,000 \text{ N/mm}^2 \\ \nu &= 0,3 \end{aligned}$$

- 1) Las deformaciones transversales ε de las direcciones a y b .
- 2) Las componentes intrínsecas, normal σ y tangencial τ , de los vectores tensión que actúan sobre los planos de normal a y b .
- 3) Las componentes intrínsecas del vector tensión cuya componente tangencial es máxima $\tau_{\text{máx}}$. Representar gráficamente dicho vector tensión y el plano sobre el que actúa, situándolo respecto a las direcciones a , b y c de referencia.

Deformació Plana

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12} \quad \text{No depenen de } x_3$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$$

Equacions de Lamé:

$$\sigma_{11} = \lambda \varepsilon_V + 2G \varepsilon_{11}$$

$$\sigma_{22} = \lambda \varepsilon_V + 2G \varepsilon_{22}$$

$$\sigma_{33} = \lambda \varepsilon_V = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\sigma_{12} = 2G \varepsilon_{12} \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

Deformació Plana

Equacions de Lamé

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & d_2 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 0 \\ \varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

Deformació Plana

Llei de Hooke Generalitzada

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 0 \\ \varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

Deformació Plana

Condicions de Superfície

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 &= f_1 \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 &= f_2 \\ \sigma_{33}n_3 &= f_3 \end{aligned} \right\}$$

Condicions d'Equilibri

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + b_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + b_2 &= 0 \\ b_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Condicions de Compatibilitat (5 eq. 0 = 0)

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}$$



Activitat 5.1b

b) Deformació plana

(límit 2 setmanes)

MECÀNICA DE MEDIS CONTINUS

Permutació 1

Temps 90 min

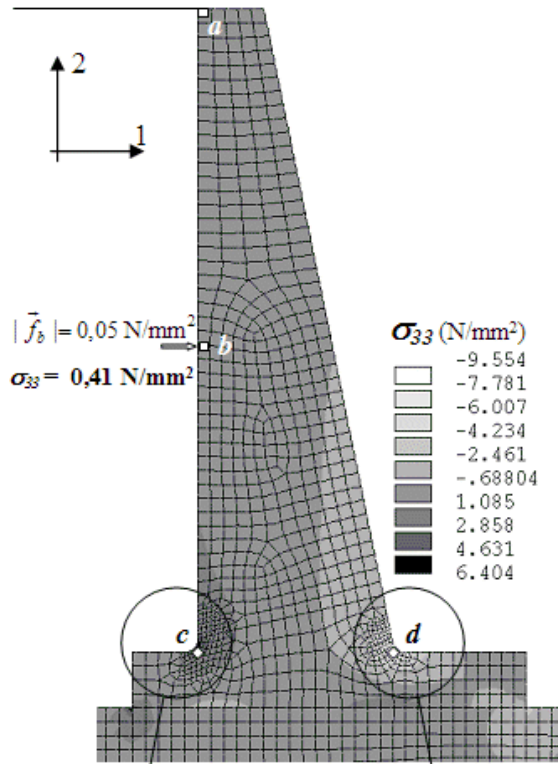
PROBLEMA 2

Punts 10

23.01.07

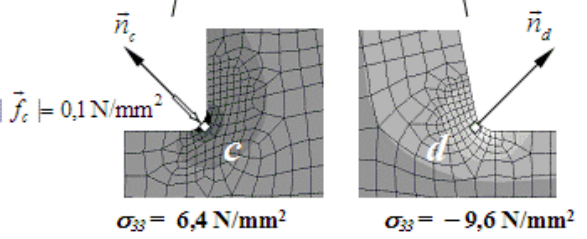
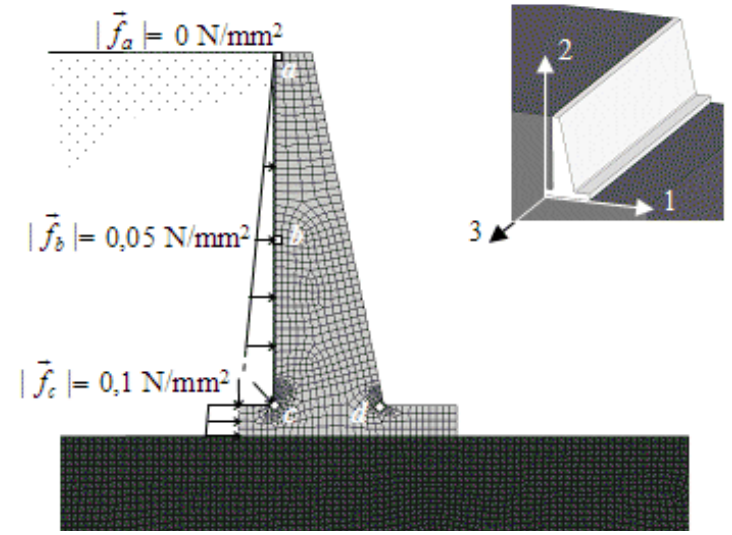
Pes: 1

S'analitza el mur de contenció esquematitzat amb el mètode dels elements finits, admetent comportament elàstic, lineal i isòtrop del material, i suposant nul·la la dilatació longitudinal del mur (deformació plana). Sobre la línia de contacte del mur amb el terreny s'aplica una força de superfície \vec{f} , sempre normal a la superfície exterior i proporcional a la profunditat, de valor 0,05 i 0,1 N/mm² en els punts *b* i *c* respectivament. S'adjunta el mapa de tensions σ_{33} perpendiculars al pla 1-2 amb els valors numèrics corresponents als punts *a*, *b*, *c* i *d*.



$E = 20.000 \text{ N/mm}^2$
 $\nu = 0,2$

La superfície exterior en els punts C i D, forma amb els eixos 1 i 2.



Es demana, per als punts *a*, *b*, *c* i *d*:

1. Raonar quines són les direccions i les tensions principals.
2. Expressar els tensors tensió en les respectives direccions principals.
3. Explicar el significat físic de les seves components i dibuixar-les sobre els quatre punts.
4. Expressar els tensors tensió en les direccions 1-2-3.
5. Explicar el significat físic de les seves components i dibuixar-les sobre els quatre punts.
6. Determinar les tensions tangencials màximes i dibuixar-les (en direcció i sentit) sobre els plans on actuen (en cadascun dels quatre punts).
7. Per al punt *c*, dibuixar els cercles de Mohr i identificar-hi els vectors tensió associats als eixos 1-2-3.



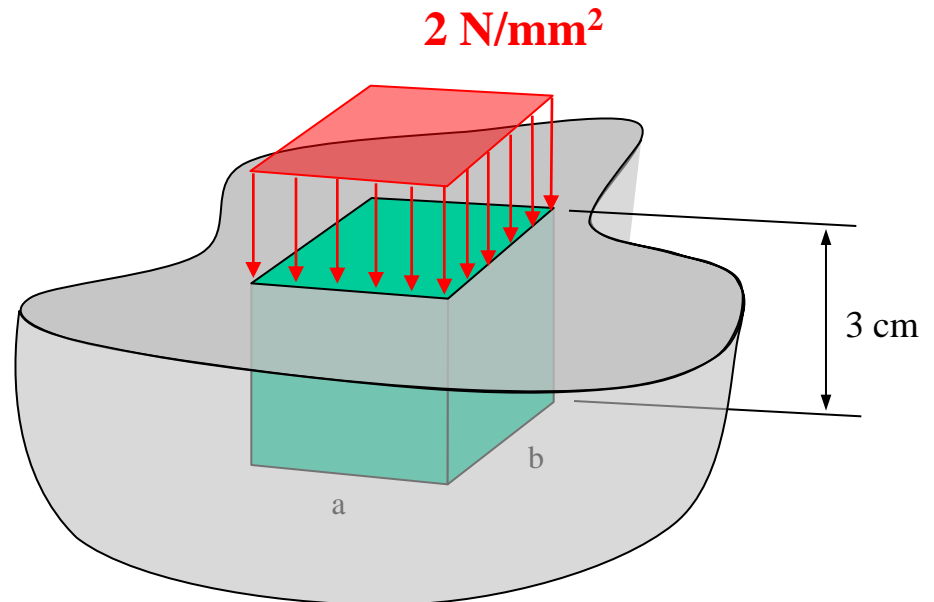
Activitat 5.2

El prisma de la figura està allotjat en una cavitat de gran rigidesa i comprimit a la cara superior amb una pressió uniforme de 2 N/mm^2

Determinar la variació d'alçada.

Es poden menysprear tant la fricció de contacte com les forces de volum.

Material: $E = 2.000 \text{ N/mm}^2$
 $\nu = 0.3$

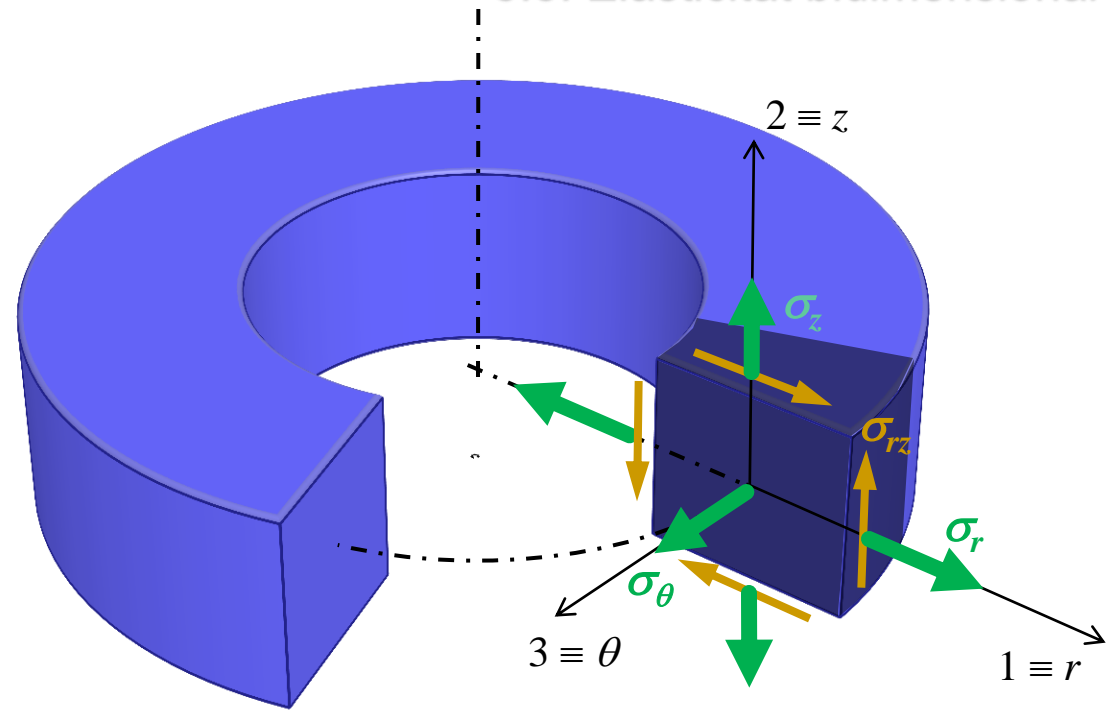




Simetria de revolució (Axisimetria)

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_{rz} & 0 \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\theta \end{bmatrix}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_r & \sigma_{rz} & 0 \\ \sigma_{rz} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta \end{bmatrix}$$



$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{u_r}{r} \left(= \frac{2\pi(r+u_r) - 2\pi r}{2\pi r} \right)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_z + \sigma_\theta)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{rz}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)]$$



Simetria de revolució

Condicions de Superfície

$$\sigma_r n_r + \sigma_{rz} n_z = f_r$$

$$\sigma_{rz} n_r + \sigma_z n_z = f_z$$

Condicions de Compatibilitat (2 eq. 0=0)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial z \partial r}$$

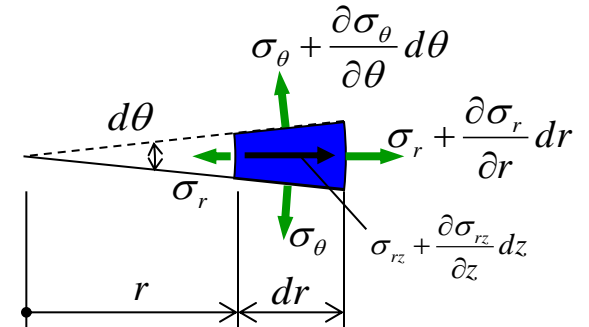
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial z} = 0$$

Condicions d'Equilibri

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + b_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + b_z = 0$$

$$b_\theta = 0$$





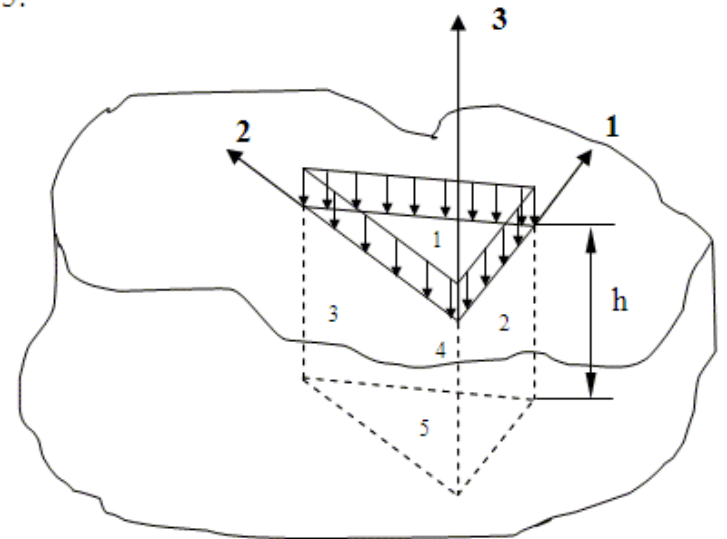
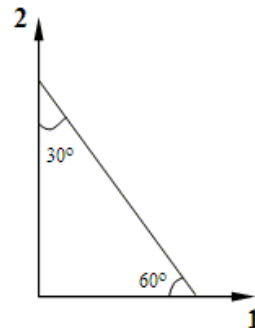
Activitat 5.2'
Entregable 15
(límit 3 setmanes)

MECÀNICA DELS MEDIS CONTINUS
Permutació 1 Temps 45 min.

PROBLEMA 2
Punts 10

13.06.01
Pes : 1

El bloque de la figura, cuya $h = 10$ cm, está incluido dentro de una cavidad de otro material, que puede considerarse infinitamente rígido, en el que ajusta perfectamente. Sobre la cara 1 del bloque se aplica una presión vertical uniforme de 10 N/mm^2 . Se observa que dicha cara desciende 1 mm . Las otras cuatro caras tienen limitados sus desplazamientos por las paredes del hueco. Suponer un comportamiento elástico lineal del bloque, despreciar el rozamiento entre el bloque y las paredes y suponer un coeficiente de Poisson $\nu = 0,35$.



Hallar:

- Módulo de Elasticidad $-E-$ del bloque
- Las fuerzas de superficie que se ejercen sobre las caras del bloque.
- Si el coeficiente de Poisson $\nu = 0,5$ ¿Cuánto descenderá el bloque?

Activitat 5.3

Una columna de formigó sotmesa a una compressió axial de 300 kN, es troba submergida dins un dipòsit d'aigua.

Determinar la variació d'alçada que experimenta.

Suposar l'aigua en repòs i ideal (no fricció als laterals).

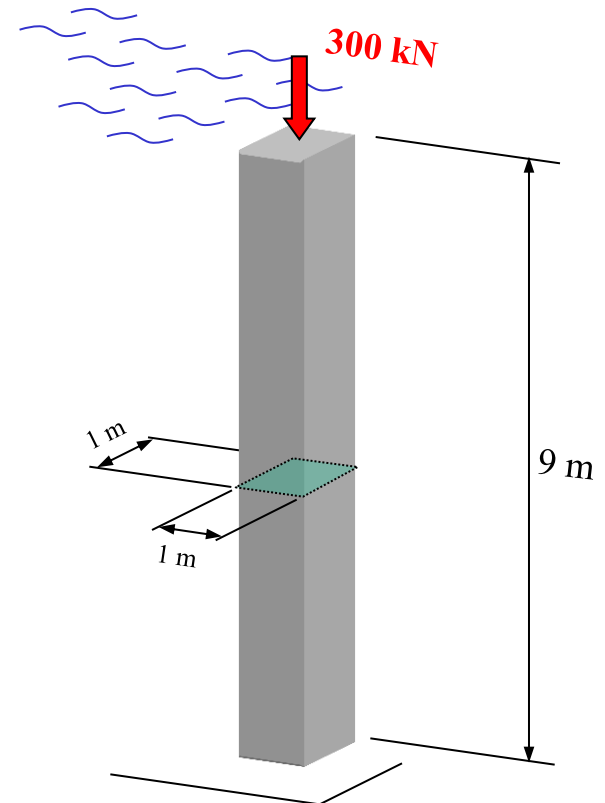
Suposar una reacció uniforme i perpendicular a la base.

Formigó: $E = 20.000 \text{ N/mm}^2$

$$\nu = 0.12$$

$$\rho_f = 2300 \text{ kg/m}^3$$

Aigua: $\rho_a = 1000 \text{ kg/m}^3$





Activitat 5.3' (a casa)

MECANICA DE MEDIS CONTINUS

Permutación 1

Tiempo 75 min

PROBLEMA 2

Puntos 10

12.01.04

Peso: 1

Se tiene una columna de material elástico lineal, totalmente sumergida en un fluido ideal en reposo y apoyada verticalmente sobre la superficie inferior sin rozamiento. La superficie superior de la columna se halla a 1 m de profundidad, soportando una carga vertical adicional de 200 kN, que se supondrá uniformemente distribuida sobre dicha superficie.

Se pide:

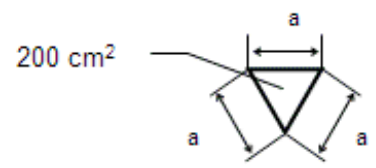
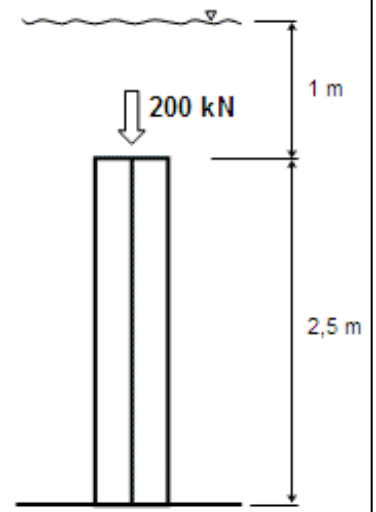
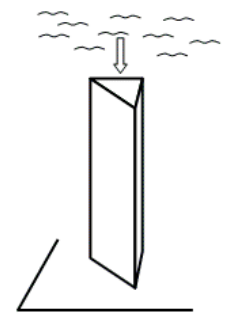
- 1) Determinar razonadamente las solicitaciones a las que está sometida la columna.
- 2) Determinar y razonar las expresiones de los tensores tensión y deformación para un punto cualquiera de la columna.
- 3) Calcular las variaciones geométricas que se producen en una sección transversal cualquiera de la columna (ángulos y longitudes de los lados) y determinarlas numéricamente para las secciones extremas de la columna (superior e inferior)
- 4) Calcular la altura final de la columna una vez deformada.
- 5) Si la columna es de hormigón (frágil), ¿cuánto vale el coeficiente de seguridad?

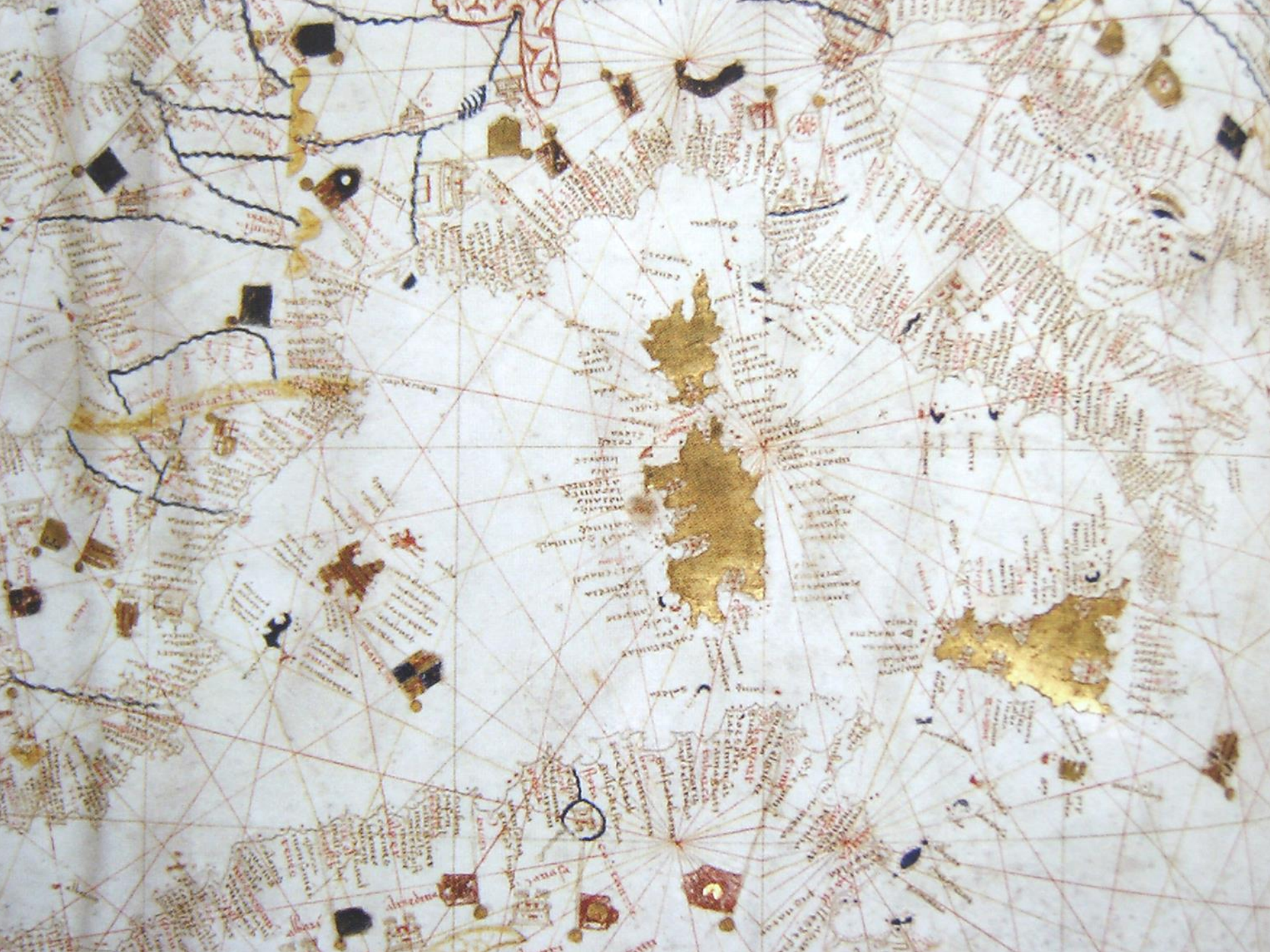
DATOS:

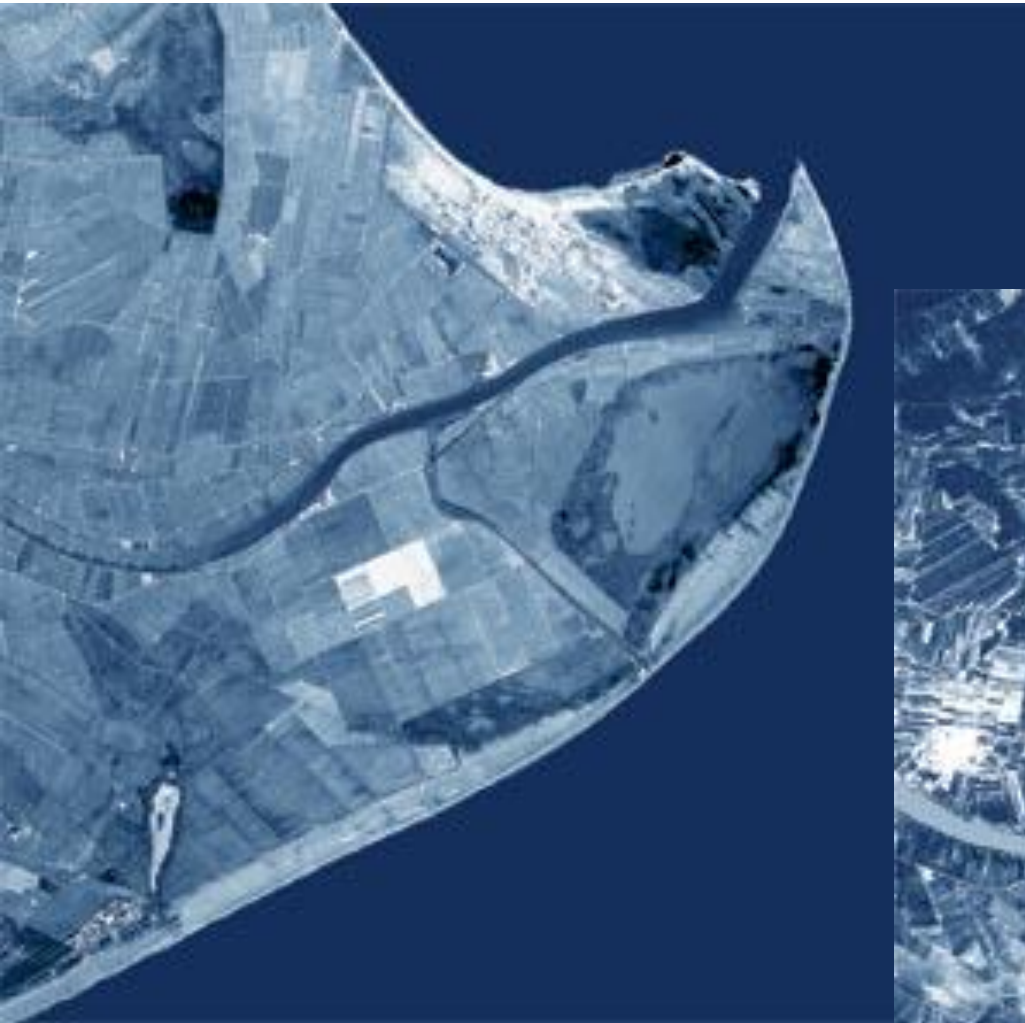
Densidad del fluido: $\rho_f = 2000 \text{ Kg/m}^3$; $g \approx 10 \text{ m/s}^2$

Propiedades del material elástico de la columna:

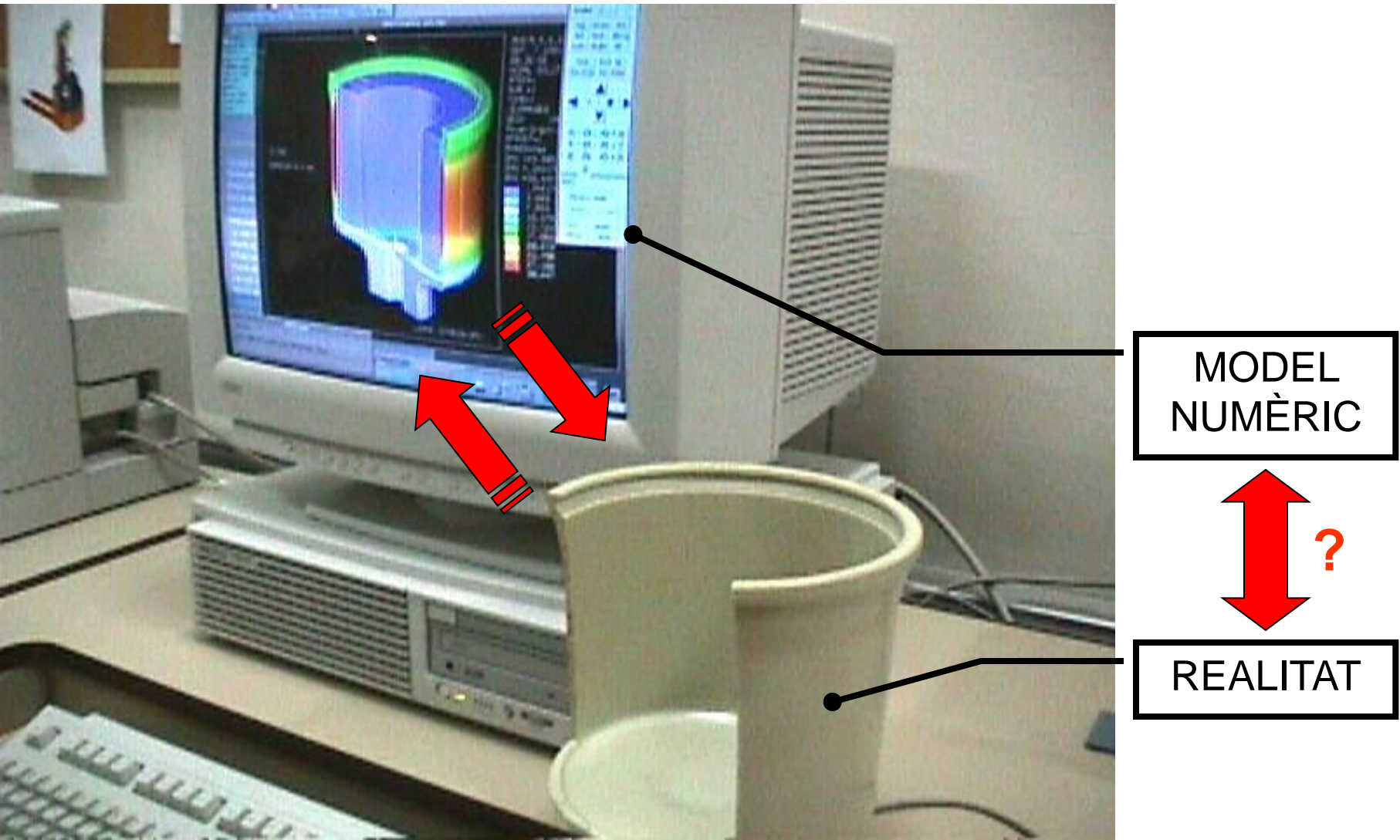
$\rho_c = 2500 \text{ Kg/m}^3$; $E_c = 20.000 \text{ N/mm}^2$; $\nu_c = 0.2$; $\sigma_{rotura a compresión} = -25 \text{ N/mm}^2$



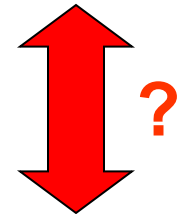




5.5. Introducció al Mètode dels Elements Finit



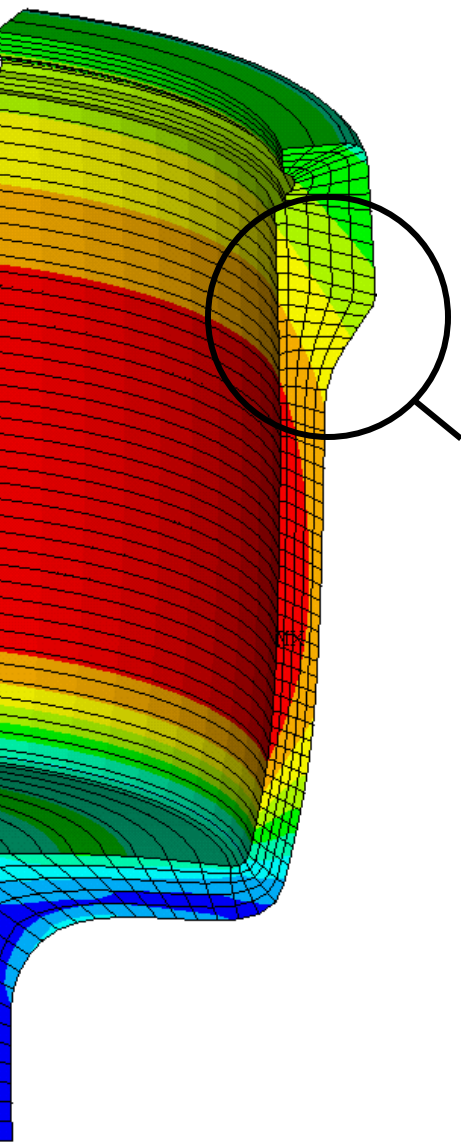
MODEL
NUMÈRIC



REALITAT

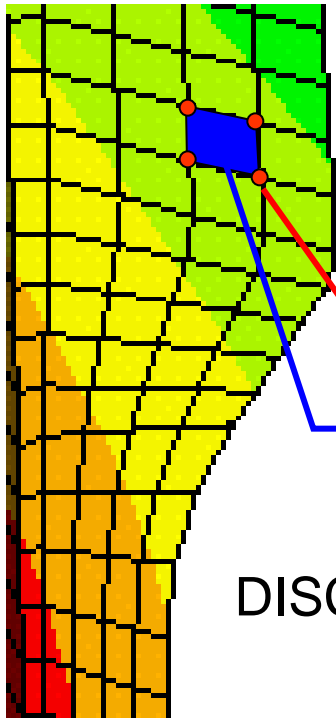


Discretització del Continu



MODEL ↔ DISECRETITZACIÓ

MALLA



NODE

ELEMENT FINIT

REALITAT ↔ MEDI CONTINU



DISCRETITZACIÓ DELS GRAUS DE LLIBERTAT
medi continu ∞ → model MEF n



FUNCIONS D'INTERPOLACIÓ

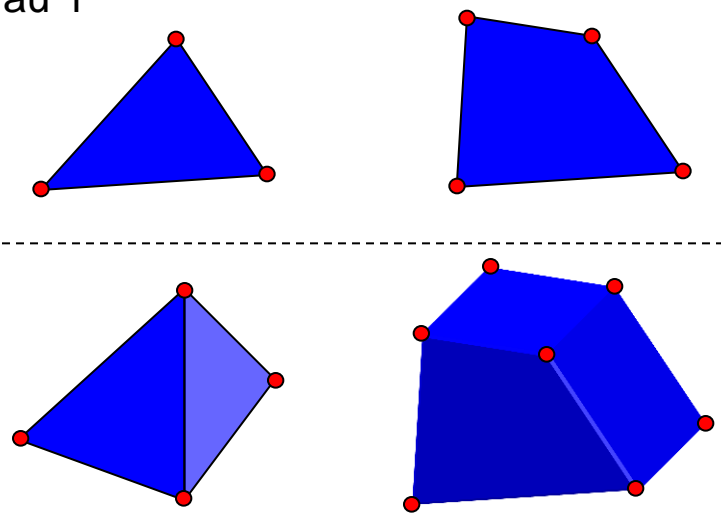
Establím unes funcions que ens permeten obtenir la solució a l'interior de l'element a partir dels **desplaçaments dels nodes**

$$\{u_P\} = [N]\{u_{nodes}\}$$

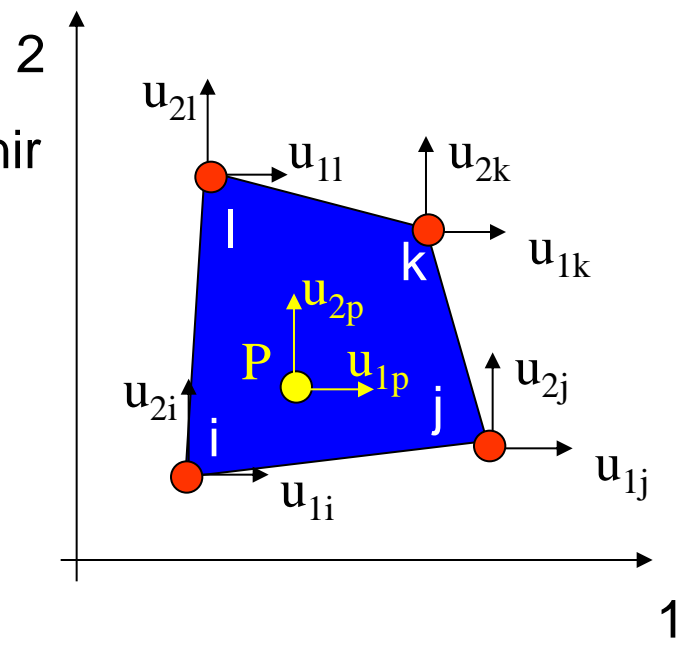
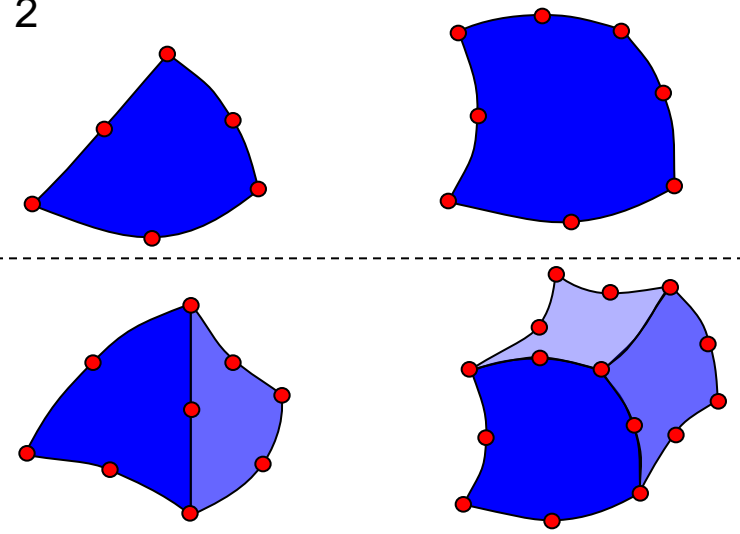
Elements isoparamètrics:

Són habitualment funcions polinòmiques:

Grau 1

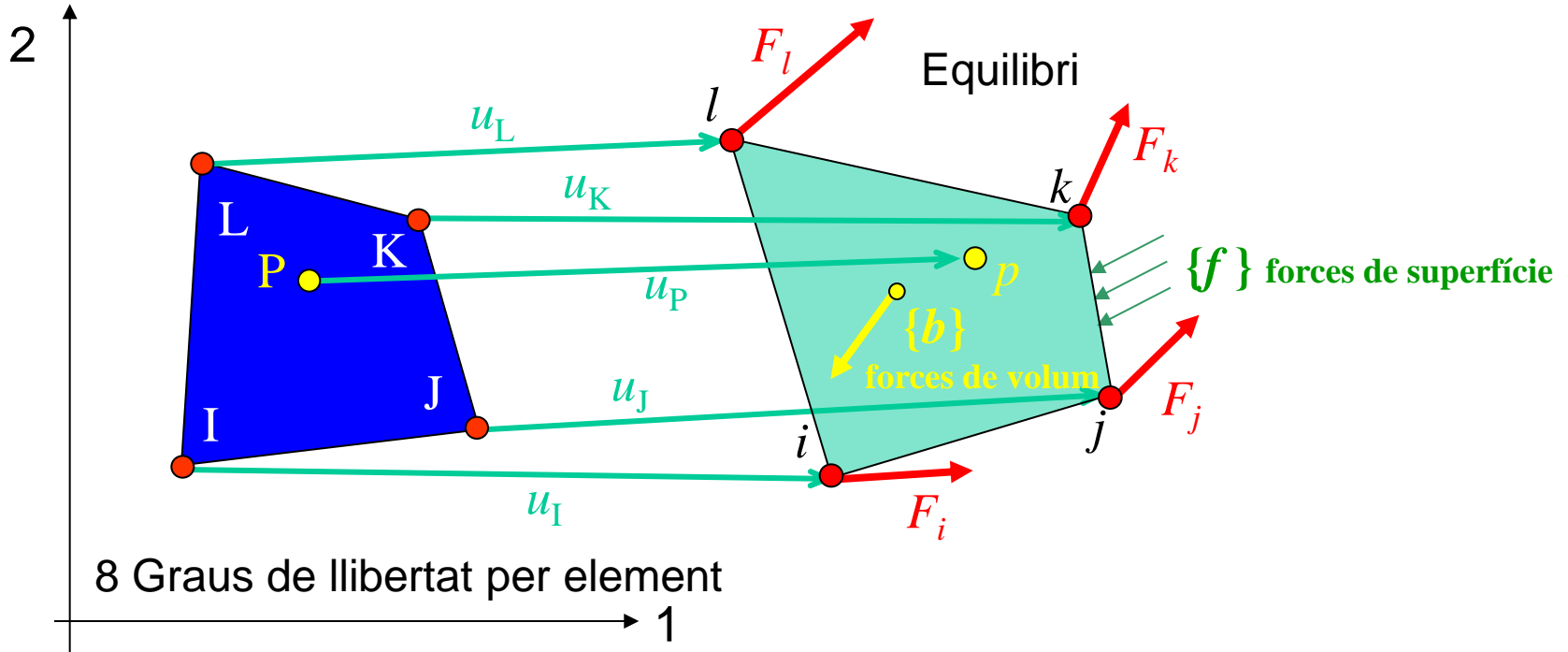


Grau 2





Objectiu: Equació d'equilibri elemental



PRINCIPI DELS TREBALLS VIRTUALS → Equació d'equilibri elemental

$$W_{\text{accions exteriors}}^* = U_{\text{deformació}}^* \rightarrow \boxed{\sum \vec{F}_{\text{exteriors}} = \sum \vec{F}_{\text{interiors}}}$$

$$\{u_{\text{nodes}}^*\} \{F_{\text{nodes}}\} + \int_A \{u_{\text{P superfície}}^*\} \{f\} dA + \int_V \{u_{\text{P}}^*\} \{b\} dV = \int_V \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV$$



Funcions d'interpolació

Estableixen la relació entre els desplaçaments dels nodes i els d'un punt interior qualsevol

$$\{u_P\} = [N]\{u_e\}$$

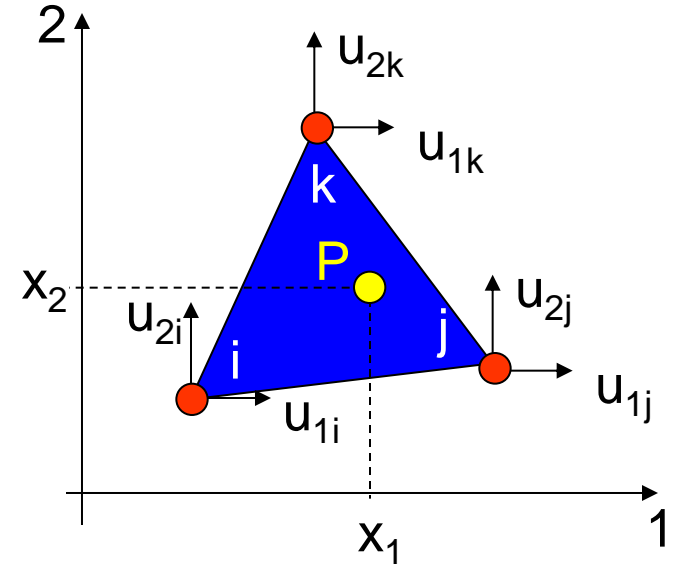
Vector de desplaçament d'un punt interior

Vector de desplaçaments nodals

$$\{u_P\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{u_e\} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

Exemple: *Contant Strain Element*



$$[N]$$

Matriu de funcions d'interpolació o funcions de forma



Si suposem que les components u_1 i u_2 són funcions lineals de les coordenades x_1 i x_2

$$\{u_P\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_2 \\ a_4 + a_5 x_1 + a_6 x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

$$\{u_P\} = [P]\{A\}$$

Matriu de monomis

Vector de coordenades generalitzades



Com que aquestes funcions també s'han de complir als nodes i, j, k, podem plantejar el sistema:

$$\{u_e\} = \begin{Bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{1j} \\ u_{2j} \\ u_{1k} \\ u_{2k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = [C]\{A\}$$

d'on deduïm el valors de les components del vector $\{A\}$:

$$\{A\} = [C]^{-1} \{u_e\}$$

finalment, $\{u_P\} = [P]\{A\} = \underbrace{[P][C]^{-1}}_{[N]} \{u_e\}$

$$\boxed{\{u_P\} = [N]\{u_e\}}$$

$$[N] = \left[\begin{array}{cc} [N_i & 0] \\ [0 & N_i] \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} [N_j & 0] \\ [0 & N_j] \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} [N_k & 0] \\ [0 & N_k] \end{array} \right]$$

$$N_i = (a_i + b_i x_1 + c_i x_2) / 2A$$

$$N_j = (a_j + b_j x_1 + c_j x_2) / 2A$$

$$N_k = (a_k + b_k x_1 + c_k x_2) / 2A$$

A és l'àrea de l'element, i:

$$a_i = x_{1j}x_{2k} - x_{1k}x_{2j}$$

$$a_j = x_{1i}x_{2k} - x_{1k}x_{2i}$$

$$a_k = x_{1i}x_{2j} - x_{1j}x_{2i}$$

$$b_i = x_{1j} - x_{2k}$$

$$b_j = x_{1i} - x_{2k}$$

$$b_k = x_{1i} - x_{2j}$$

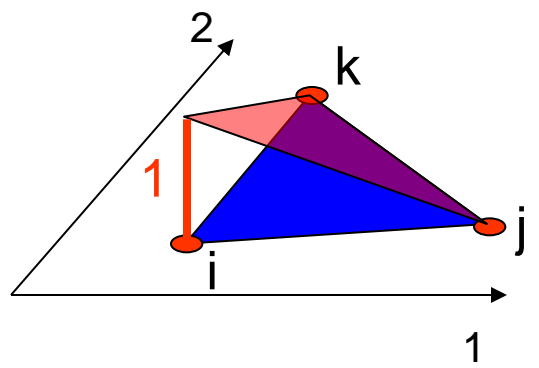
$$c_i = x_{1k} - x_{2j}$$

$$c_j = x_{1k} - x_{2i}$$

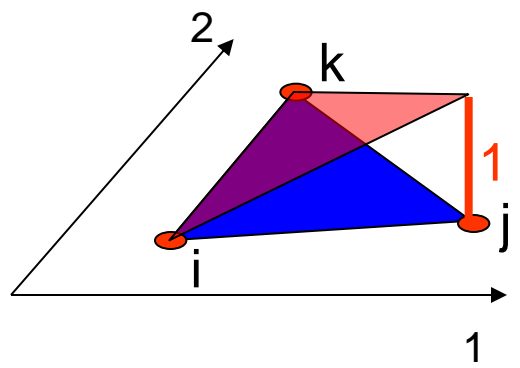
$$c_k = x_{1j} - x_{2i}$$



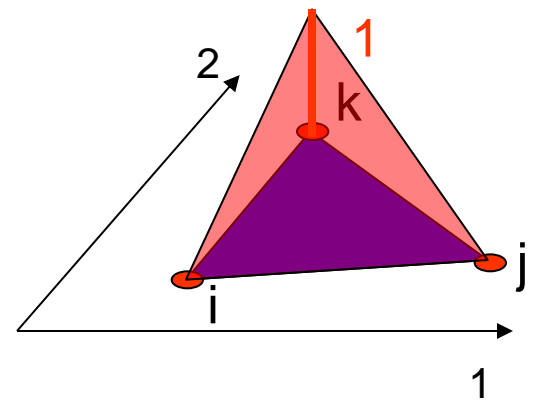
Es pot comprovar que aquestes funcions d'interpolació, compleixen que:



N_i



N_j

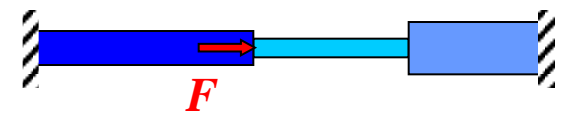
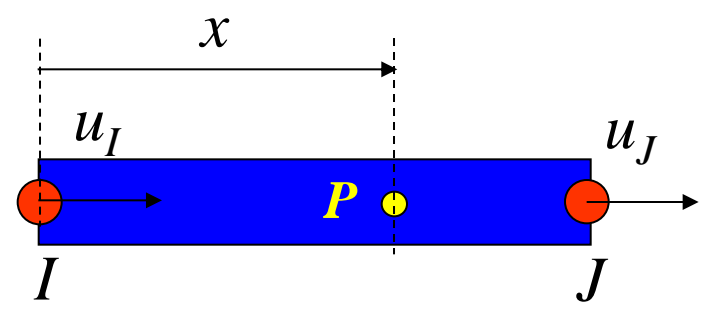


N_k



Activitat 5.4

Establir les funcions d'interpolació, relació entre els desplaçaments dels nodes i els d'un punt interior qualsevol, per a un element unidimensional



$$\{u_P\} = [N]\{u_e\}$$

$$\{u_P\} = [P]\{A\} \quad \longrightarrow \quad \{u_P\} = \underbrace{[P][C]^{-1}}_{[N]}\{u_e\}$$

$$\{u_e\} = [C]\{A\} \quad \longrightarrow \quad \{A\} = [C]^{-1}\{u_e\}$$

Discretització de l'estat de deformació (2D)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \right\} \text{Medi continu}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [L]\{u\}$$

Discretitzem amb l'expressió: $\{u_P\} = [N]\{u_e\}$

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} = [L][N]\{u_e\} = [B]\{u_e\}$$

Matriu de deformacions
(al cas estudiat són cnts)



Discretització de l'estat de tensió (2D)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{u_e\} = [S]\{u_e\}$$

$\{\varepsilon\} = [B]\{u_e\}$
 \downarrow

Matriu d'elasticitat Matriu de tensions
 (al cas estudiat són cnts)

Tensió plana

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

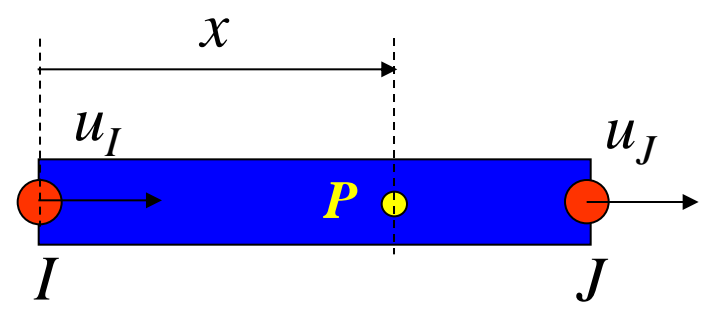
Deformació plana

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$



Activitat 5.5

Deduir les matrius de deformacions i de tensions per a un element unidimensional



$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_e\}$$

$$\{\sigma\} = [S]\{u_e\}$$

$$[B] = [L][N]$$

$$[S] = [D][B] = [D][L][N]$$



Equació d'equilibri. Matriu de rigidesa elemental $[K_e]$

Les incògnites a determinar són els desplaçaments nodals $\{u_e\}$

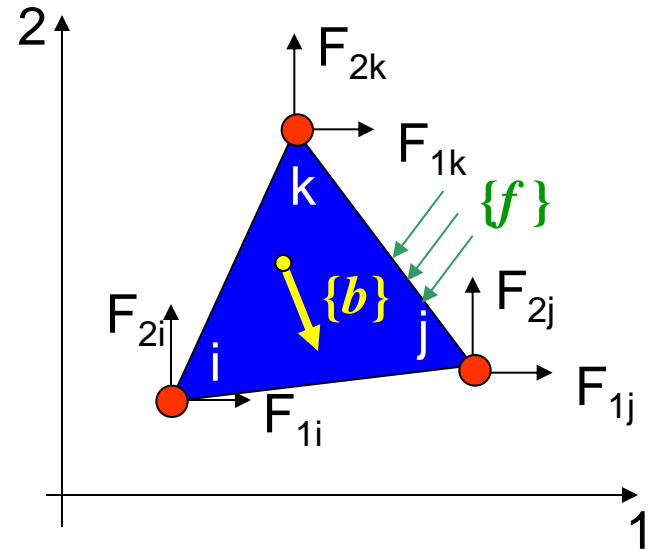
$$\left\{ \begin{array}{l} \{u_P\} = [N]\{u_e\} \\ \{\varepsilon\} = [B]\{u_e\} \\ \{\sigma\} = [S]\{u_e\} \end{array} \right.$$

Les forces exteriors aplicades:

$\{f\}$ Forces de superfície

$\{b\}$ Forces de volum

$\{F\}$ Forces nodals



Principi dels treballs virtuals: El treball virtual realitzat per les forces exteriors aplicades ha de ser igual al treball de les forces interiors o energia de deformació:

$$\{u_e^*\} \{F_e\} + \int_A \{u^*\} \{f\} dA + \int_V \{u^*\} \{b\} dV = \int_V \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV$$

$$\{u^*\} = [N] \{u_e^*\} \quad \downarrow \quad \{\varepsilon^*\} = [B] \{u_e^*\}$$

$$\cancel{\{u_e^*\}^T} \{F_e\} + \int_A \cancel{[N] \{u_e^*\}}^T \{f\} dA + \int_V \cancel{[N] \{u_e^*\}}^T \{b\} dV = \int_V \cancel{[B] \{u_e^*\}}^T \{\sigma\} dV$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D][B] \{u_e\} \quad \downarrow$$

$$\{F_e\} + \int_A [N]^T \{f\} dA + \int_V [N]^T \{b\} dV = \int_V [B]^T [D][B] dV \{u_e\}$$



$$\{F_e\} + \int_A [N]^T \{f\} dA + \int_V [N]^T \{b\} dV = \int_V [B]^T [D] [B] dV \{u_e\}$$

$$\{F_e\} + \underbrace{\{F_e^f\} + \{F_e^b\}}_{\text{Càrregues nodals equivalents}} = [K_e] \{u_e\}$$

Càrregues nodals equivalents

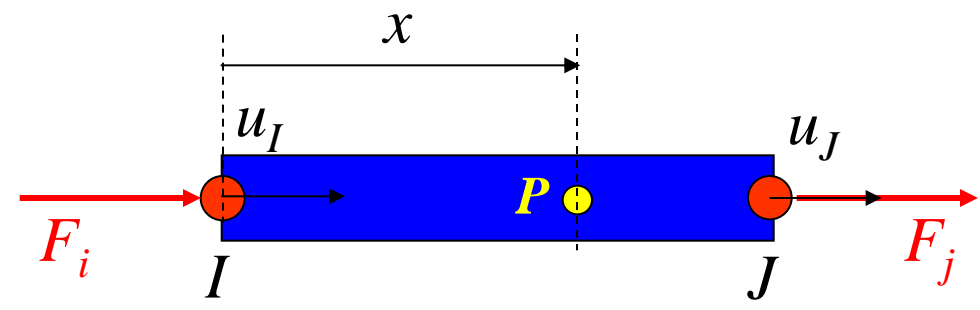
Matriu de rigidesa elemental

És una matriu simètrica i singular !!



Activitat 5.6

Deduir la matriu de rigidesa per a un element unidimensional



$$\{F_e\} = [K_e]\{u_e\}$$

Principi dels treballs virtuals

$$\{u_e^*\}\{F_e\} = \int_V \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV \longrightarrow \{F_e\} = \int_V [B]^T [D][B] dV \{u_e\}$$

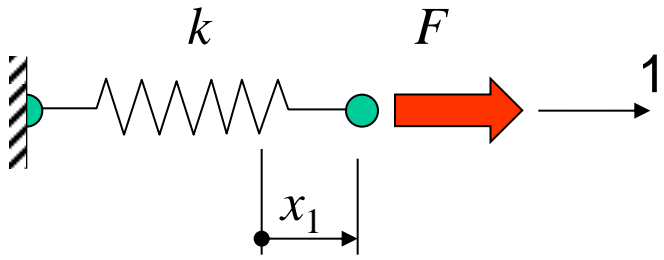
$$\{u^*\} = [N]\{u_e^*\}$$

$$\{\varepsilon^*\} = [B]\{u_e^*\}$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{u_e\}$$

$$\downarrow$$

$$[K_e]$$



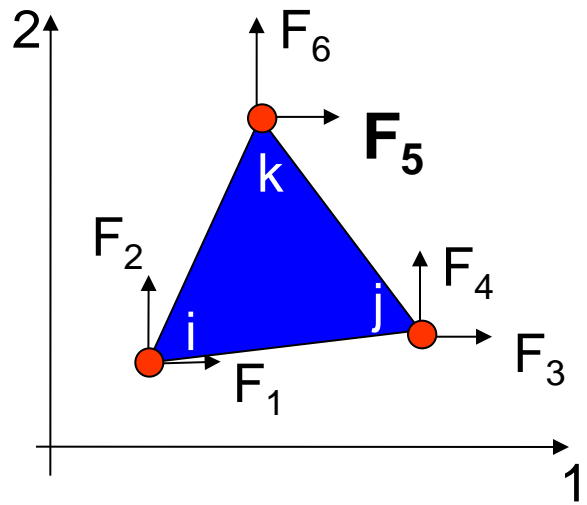
$$F = k \cdot x_1$$

$$k = F / 1$$

$$k = F / x_1$$

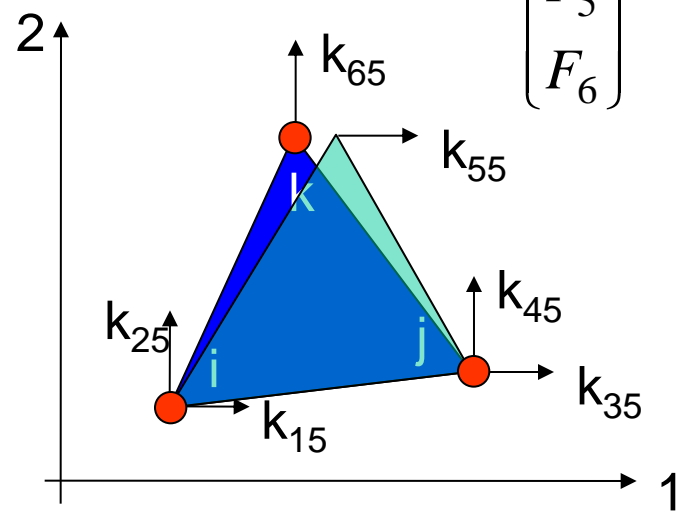
Rigidesa: Força associada a un desplaçament unitari

$$\{F_e\} = [K_e] \{u_e\}$$



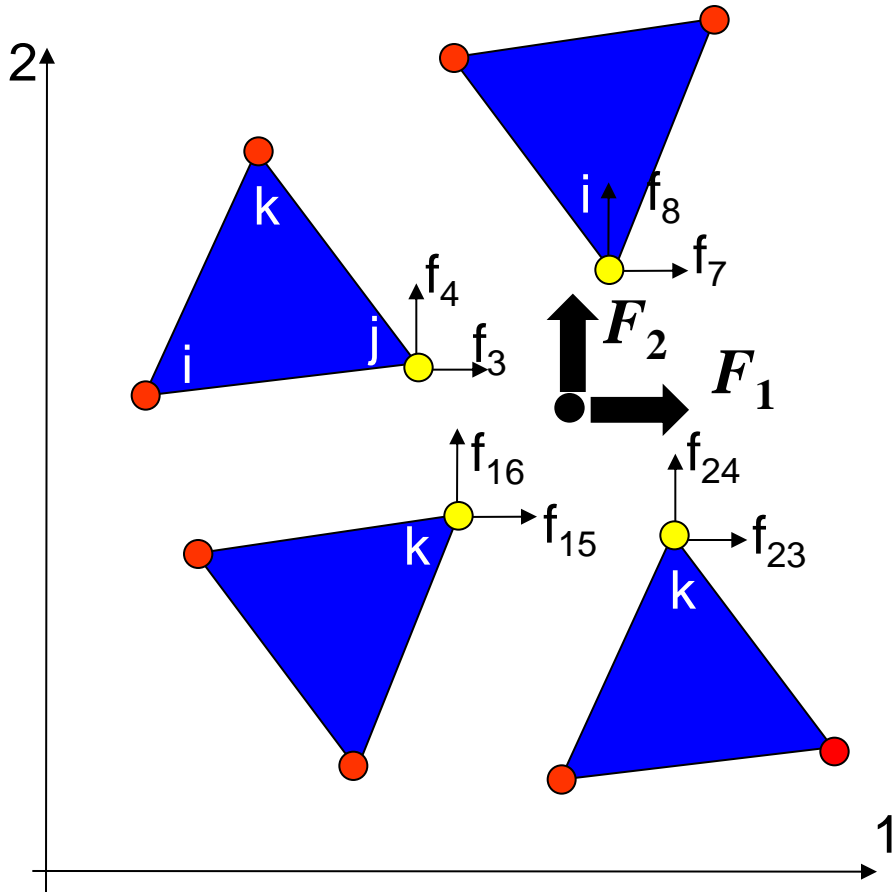
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = [K_e] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_5 = 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{15} \\ k_{25} \\ k_{35} \\ k_{45} \\ k_{55} \\ k_{65} \end{Bmatrix}$$

Columna 5





Matriu de rigidesa global [K_{EG}]



Equilibri nodal:

Equilibri global:

$$\{P_{EG}\} = [K_{EG}]\{u_{EG}\}$$

Vector de càrregues
exteriors
(nodals equivalents)

Vector de
desplaçaments
nodals

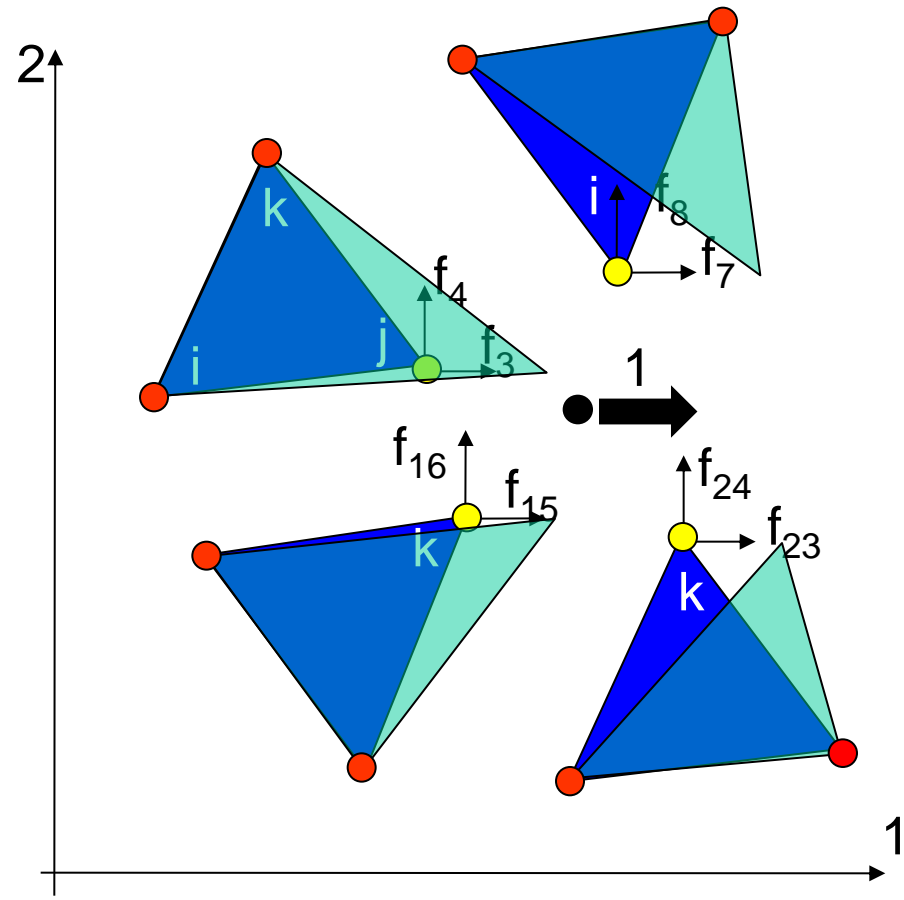
Matriu de Rigidesa Global:
Cada terme és la suma de termes
dels elements concurrents

$$F_1 = f_3 + f_7 + f_{15} + f_{23} = \dots$$

$$F_2 = f_8 + f_4 + f_{16} + f_{24} = \dots$$



5.5. Introducció al Mètode dels Elements Finit



$$k_{11} = f_3 + f_7 + f_{15} + f_{23} = \dots$$



Condicions de contorn. SISTEMA REDUÏT

Del sistema general $\{P_{EG}\} = [K_{EG}]\{u_{EG}\}$, separem les equacions corresponents als graus de llibertat restringits. Ens queda:

$$\begin{matrix} \text{inc} \\ \left\{ \begin{array}{c} P_E \\ P_S \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} K_E & K_{ES} \\ K_{SE} & K_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E \\ u_S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_E & K_{ES} \\ K_{SE} & K_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E \\ 0 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

El sistema desacoblat $\{P_E\} = [K_E]\{u_E\}$ és compatible i determinat.

$$\boxed{\{u_E\} = [K_E]^{-1} \{P_E\}}$$

$$\xrightarrow[\text{"Post-procés"}]{\text{RESULTATS DERIVATS}} \begin{cases} \{\varepsilon\} = [B]\{u_e\} \\ \{\sigma\} = [S]\{u_e\} \end{cases}$$

ÉS LA SOLUCIÓ DEL PROBLEMA ELÀSTIC
(solució discretitzada del camp de desplaçaments)

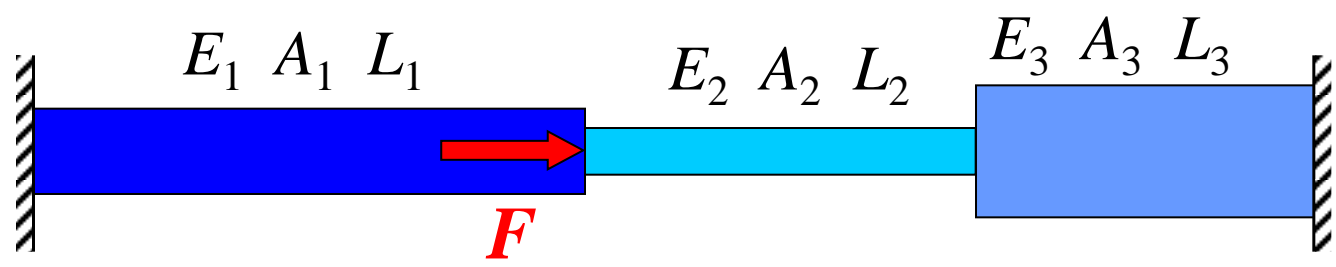
$$\{P_S\} = [K_{SE}]\{u_E\}$$

"Reaccions"



Activitat 5.7

Resoldre el següent problema elàstic mitjançant elements finits uniaxials:



Matrius de rigidesa elemental

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}$$

Rigidesa global

Ensamblatge $[K_{EG}]$

Discretització

Condicions de contorn

Sistema reduït

$$\begin{Bmatrix} P_E \end{Bmatrix} \quad [K_E]$$

Solució $\{u_E\}$

Resultats derivats

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_e\}$$

$$\{\sigma\} = [S]\{u_e\}$$

Reaccions

$$\{P_S\} = [K_{SE}]\{u_E\}$$



Activitat 5.8
(a l'aula, 1 min)

MECÀNICA DE MEDIS CONTINUS

Permutació 1

Temps 90 min

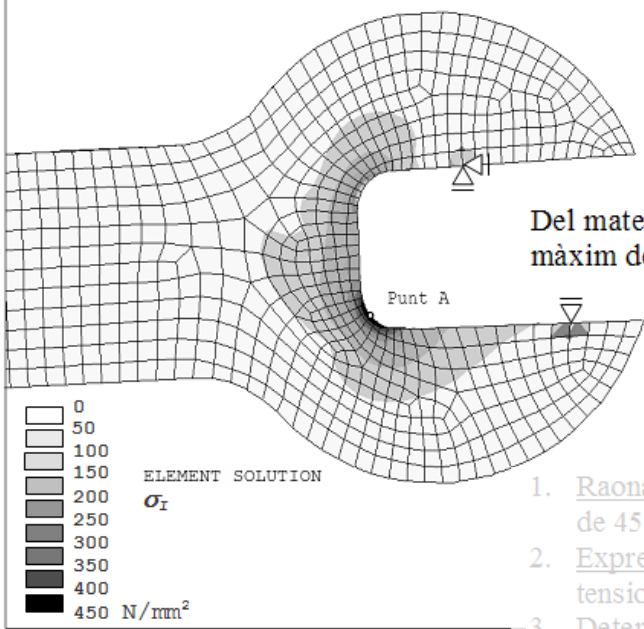
PROBLEMA 2

Punts 10

22.06.07

Pes: 1

L'estudi tensional (elàstic i lineal) d'una clau fixa, mitjançant el mètode dels elements finits, dona el mapa de tensions principals màximes (σ_I) de la figura. El valor més intens es produeix en el punt A indicat.



Gruix constant 10 mm
Càrrega exterior resultant 1000 N
No hi ha accions externes perpendiculars al pla de la peça

Del mateix model d'elements finits s'obté el mapa de tensions tangencials σ_{12} (no il·lustrat) amb el resultat màxim de -225 N/mm² per al mateix punt A.

Es demana, per al punt A:

Característiques de la malla:

997 nodes

357 elements sòlid 2D
de 8 nodes i 2 G.L. per node

1. Raonar i representar gràficament sobre la peça, en quins plans, direcció i sentit actua la tensió il·lustrada de 450 N/mm².
2. Expressar el tensor tensió en les direccions principals. Descriure les particularitats de les direccions i tensions principals.
3. Determinar gràficament (Mohr) l'angle que forma la normal a la superfície en A amb els eixos 1-2.
4. Deduir l'expressió del tensor tensió en la base 1-2-3. Dibuixar totes les components i interpretar-ne el significat físic.
5. Si el material falla de manera dúctil, raonar en quin pla s'iniciarà la plastificació.
6. Si el material fallés de manera fràgil, raonar en quin pla s'iniciaria la ruptura.
7. Determinar la tensió equivalent segons els criteris de fallida de Rankine, Tresca i von Mises, i raonar el motiu de les discrepàncies i/o coincidències entre els diferents criteris.
8. Determinar la tensió de límit elàstic mínima necessària per a obtenir un coeficient de seguretat $\geq 1,2$ amb cadascun dels criteris de fallida, comparar els resultats en el pla de tensions principals (Westergaard).
9. Si la tensió de límit elàstic del material finalment escollit és de 900 N/mm², determinar quina càrrega exterior resultant màxima podem aplicar sense disminuir la seguretat.
10. Segons les característiques de la malla i enllaços indicats, raonar quina seria la dimensió de la matriu de rigidesa reduïda.

MEF →



Activitat 5.9

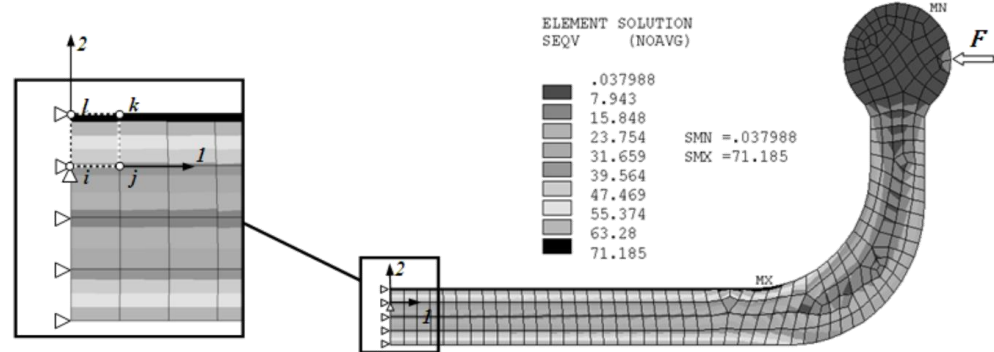
Entregable 16

(límit 3 setmanes)

Problema 1

11.06.08

a) mapa de tensions equivalents de von Mises (N/mm²), i valors extrems:



b) Coordenades nodals i vectors desplaçament dels nodes *i-j-k-l* (tot en mm):

NODE	X_1	X_2	VECTOR \vec{u}	u_1	u_2
<i>i</i>	0,0000	0,0000		0,000000	0,000000
<i>j</i>	5,0000	0,0000		-0,000800	0,000400
<i>k</i>	5,0000	5,0000		-0,001500	0,000750
<i>l</i>	0,0000	5,0000		0,000000	0,000350

c) Resultats elementals de deformació (element *i-j-k-l*), al node *j*:

NODE	ϵ_{11}	ϵ_{22}	ϵ_{33}	ϵ_{12}	ϵ_{23}	ϵ_{13}
<i>j</i>	-160E-6	70E-6	10E-6	-30E-6	0,0	0,0

d) Les funcions d'interpolació simplificades per a l'element sòlid 2D de 4 nodes són del tipus:

$$\begin{cases} u_1 = A + BX_1 + CX_2 + DX_1X_2 \\ u_2 = E + FX_1 + GX_2 + HX_1X_2 \end{cases}$$

e) Mòdul elàstic introduït per a caracteritzar el material és $E=200.000$ MPa

A partir d'aquestes dades, es demana:

1. Determinar l'expressió del camp de desplaçaments per a l'element *i-j-k-l*.
2. Determinar el vector rotació d'un punt genèric $p (X_1, X_2)$ de l'interior de l'element *i-j-k-l*. Quant val en i ?
3. Enunciar el principi de superposició. Deduir la llei de Hooke en **tensió plana** a partir del cas uniaxial.
4. Sabent que la formulació de l'element finit correspon al cas de tensió plana, calcular el valor del coeficient de Poisson introduït per a caracteritzar el material.
5. Determinar el tensor deformació per a un punt genèric $p (X_1, X_2)$ de l'interior de l'element *i-j-k-l*. Quant val al centre de l'element? Calcular i dibuixar-hi les deformacions i direccions principals.
6. Calcular la tensió equivalent de von Mises **al centre** de l'element *i-j-k-l*.
7. Raonar i determinar la tensió de límit elàstic mínima necessària per a obtenir, per al conjunt de la peça, un coeficient de seguretat $\gamma_s = 1,5$ segons el criteri de von Mises. Representar-ho gràficament al pla de tensions principals (Haigh-Westergaard).
8. Descriure esquemàticament l'operativa que utilitza el mètode dels elements finits per a resoldre el problema elàstic.



Guia operacional del M.E.F.

PREPROCÉS:

- 1) Dades de partida: geometria, material, condicions d'enllaç i sol·licitacions
- 2) Construir la malla: (atenent a la precisió desitjada en cada regió)
- 3) Escollir $[N]$ i determinar per a cada element: $[D]$, $[B]$, $[K_e]$

RESOLUCIÓ:

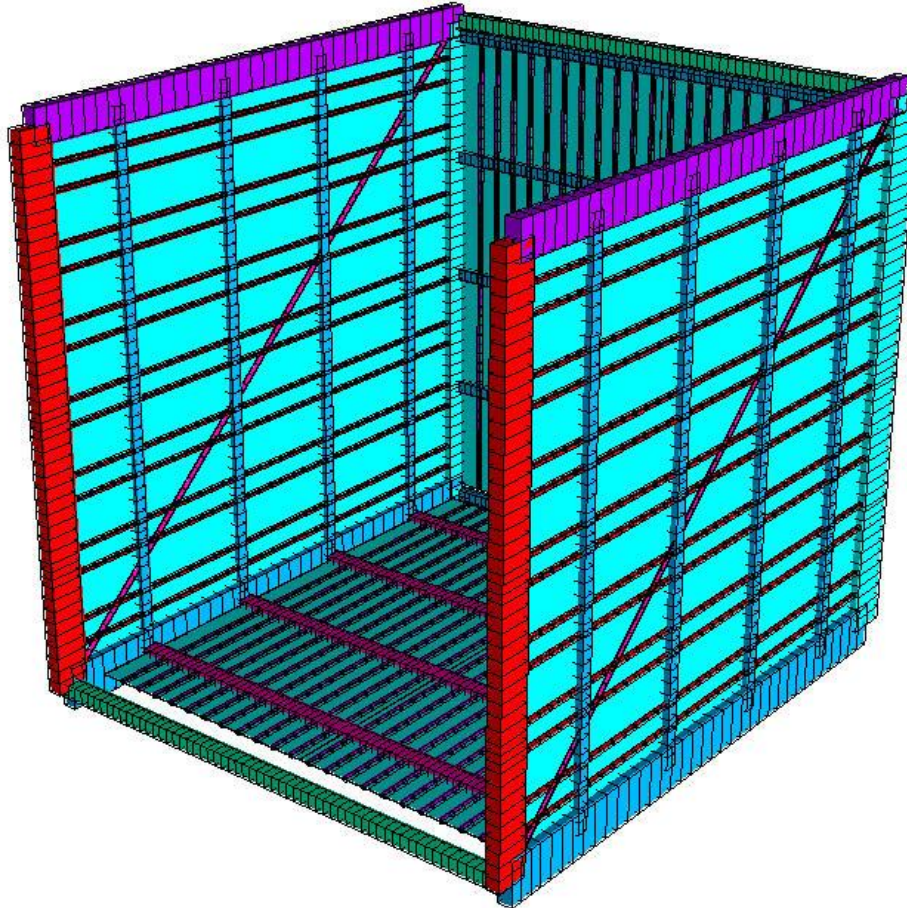
- 4) Construir $[K_{EG}]$, $\{u_{EG}\}$, $\{P_{EG}\}$
- 5) Obtenir el sistema reduït $[K_E]$, $\{\phi_E\}$, $\{P_E\}$ eliminant els graus de llibertat restringits
- 6) Resoldre $\{u_E\} = [K_E]^{-1} \cdot \{P_E\}$
- 7) Resoldre les reaccions $\{P_S\} = [K_{ES}] \cdot \{u_E\}$

POSTPROCÉS:

- 8) Determinar i visualitzar els estats de tensió i deformació per a cada element
 $\{\sigma\} = [S] \cdot \{u_e\}$ $\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{u_e\}$



1. Problema

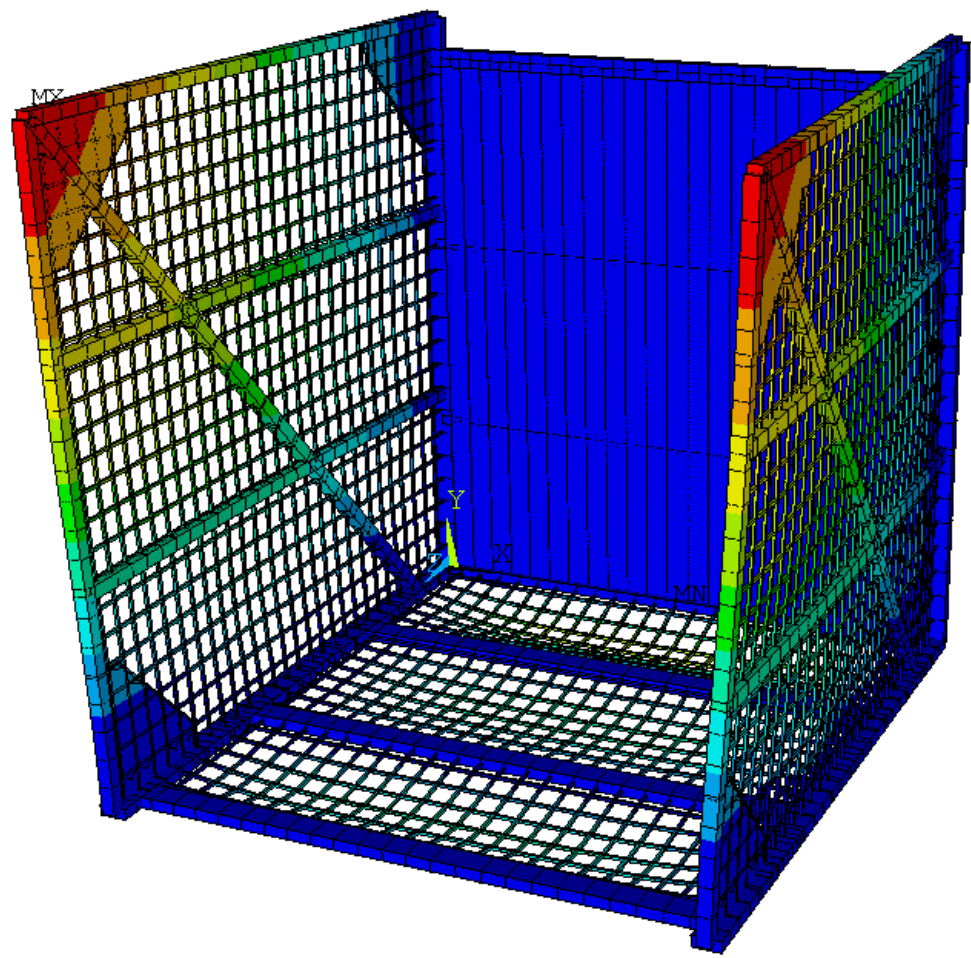


```
ELEMENTS  
/EXPANDED  
PowerGraphic  
EFACET=1  
REAL NUM
```

```
XV =.573132  
YV =.36265  
ZV =.73485  
DIST=4231  
XF =540  
YF =558.5  
ZF =605  
A-ZS=-.37371  
CONE=15  
Z-BUFFER  
EDGE
```



1. Problema



```
ANSYS 5.7.1  
NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
USUM      (AVG)  
RSYS=0  
PowerGraphics  
EFACET=1  
AVRES=Mat  
DMX =8.604  
SMN =.262E-06  
SMX =8.604  
      .262E-06  
      .955998  
      1.912  
      2.868  
      3.824  
      4.78  
      5.736  
      6.692  
      7.648  
      8.604
```


2. Física funcional de l'objecte d'estudi

- FUNCIÓ de l'objecte d'estudi
- FENÒMENS FÍSICS que garanteixen el correcte funcionament de l'objecte



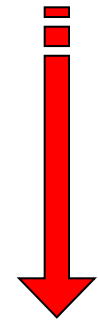
3. Característiques bàsiques de la física del problema

- Estàtic / Quasi-estàtic / Dinàmic / Impacte / Fatiga
- Estacionari / Transitori
- Linealitat geomètrica / Inestabilitat a compressió (vinclament, abonyegament). Grans desplaçaments
- Elàstic / No linealitat material (plasticitat, hiperelasticitat, fissuració, viscositat)
- Fenòmens acoblats (tèrmic-estructural, fluid-estructural)

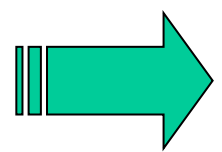


4. Problema \Leftrightarrow Objectiu \Leftrightarrow Criteris de valoració

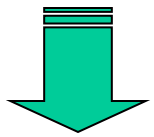
- Rigidesa i deformabilitat general?
- *Tensions i Deformacions* globals?
- Localització de punts conflictius?
- Estudi de *Tensions locals* de punts conflictius?
- Estudi de trajectòries de col·lapse o fractures?



Complexitat creixent

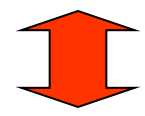


ESCALA ?



DOMINI

Límits del model



CONDICIONS DE CONTORN

Guia operacional del M.E.F.

PREPROCÉS:

- 1) Dades de partida: geometria, material, condicions d'enllaç i sol·licitacions
- 2) Construir la malla: (atenent a la precisió desitjada en cada regió)
- 3) Escollir $[M]$ i determinar per a cada element: $[D]$, $[B]$, $[K_e]$

RESOLUCIÓ:

- 4) Construir $[K_{EG}]$, $\{u_{EG}\}$, $\{P_{EG}\}$
- 5) Obtenir el sistema reduït $[K_E]$, $\{\phi_E\}$, $\{P_E\}$ eliminant els graus de llibertat restringits
- 6) Resoldre $\{u_E\} = [K_E]^{-1} \cdot \{P_E\}$
- 7) Resoldre les reaccions $\{P_S\} = [K_{ES}] \cdot \{u_E\}$

POSTPROCÉS:

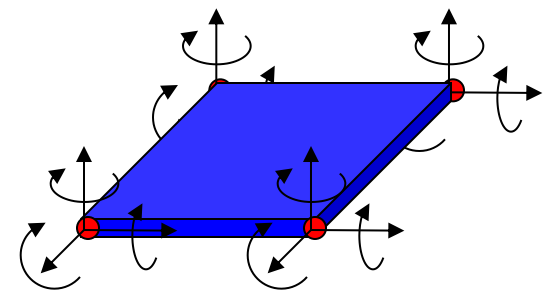
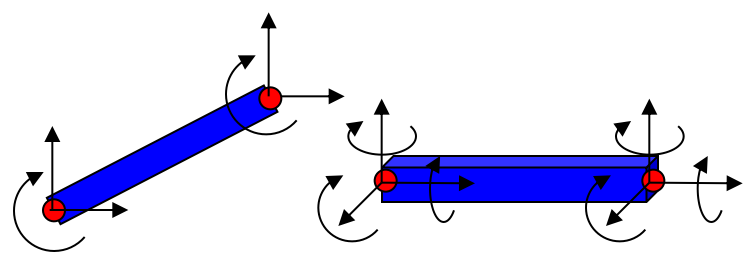
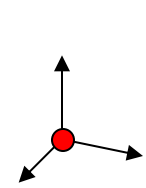
- 8) Determinar i visualitzar els estats de tensió i deformació per a cada element

$$\{\sigma\} = [S] \cdot \{u_e\} \qquad \{\varepsilon\} = [B] \cdot \{u_e\}$$



5. Idealització del Problema

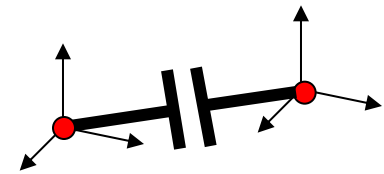
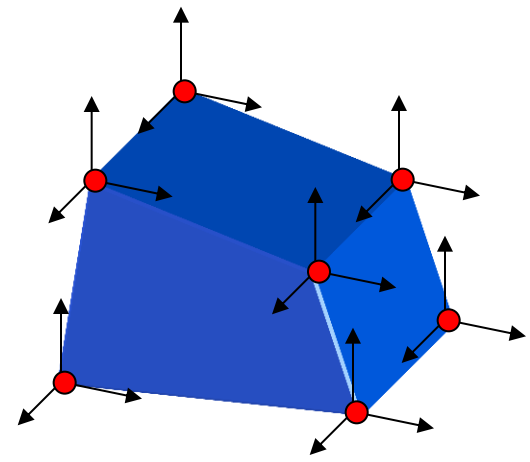
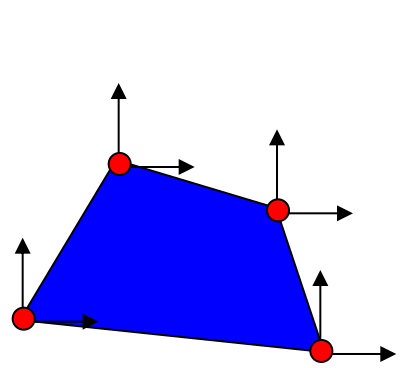
1. Idealització geomètrica: Tipus d'*Element Finit*



Massa puntual

Barres 2D / 3D

Plaques



Continu 2D /3D

Contactes



5. Idealització del Problema

2. Idealització de la geometria global

- Tenir en consideració tots els paràmetres essencials per a la física del problema i prescindir dels detalls insignificants.
- Cal definir amb exactitud els límits del model.
- Convé aprofitar totes les simplificacions possibles degut a simetries/antimetries/axisimetries de càrrega i geomètriques.



5. Idealització del Problema

3. Idealització del comportament del material

- **Elasticitat lineal**
- **Isotropia** / Anisotropia
- Elasticitat no-lineal
- Plasticitat
 - Bilineal
 - Multilineal
 - Isotròpica
 - Cinemàtica
- Hiperelasticitat
- Viscositat (Elàstica/Plàstica, Lineal/no-lineal, Isòtropa/Anisòtropa)
- Fluència (CREEP)



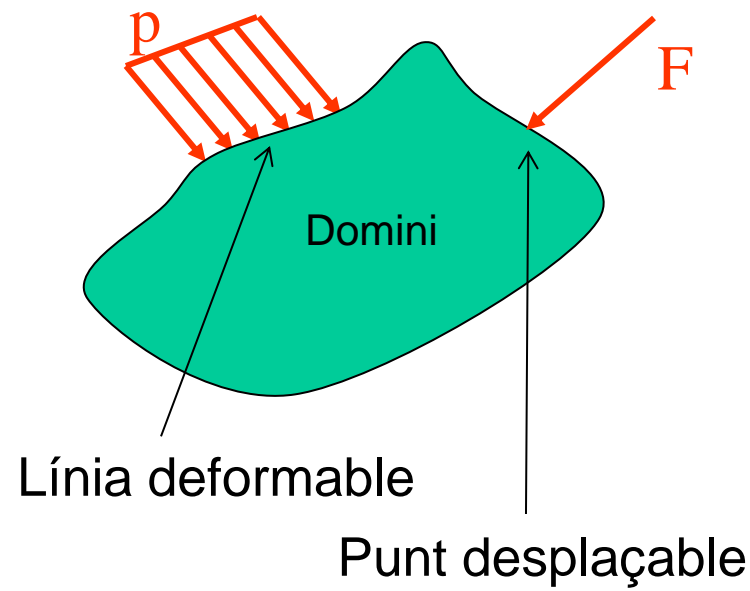
5. Idealització del Problema

4. Idealització de les condicions de contorn

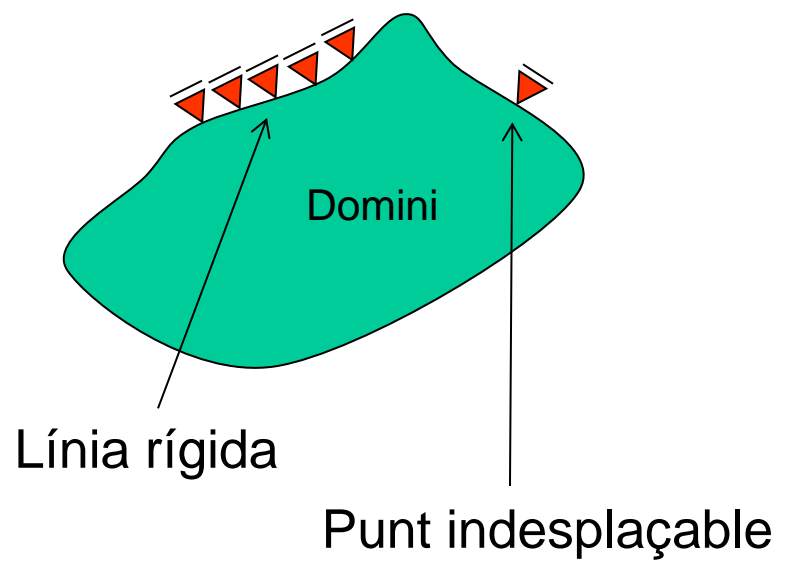
Els límits del *domini* d'anàlisi han de correspondre a zones de comportament conegut, quant a esforç aplicat o deformabilitat.

- CÀRREGA

- ENLLAÇ



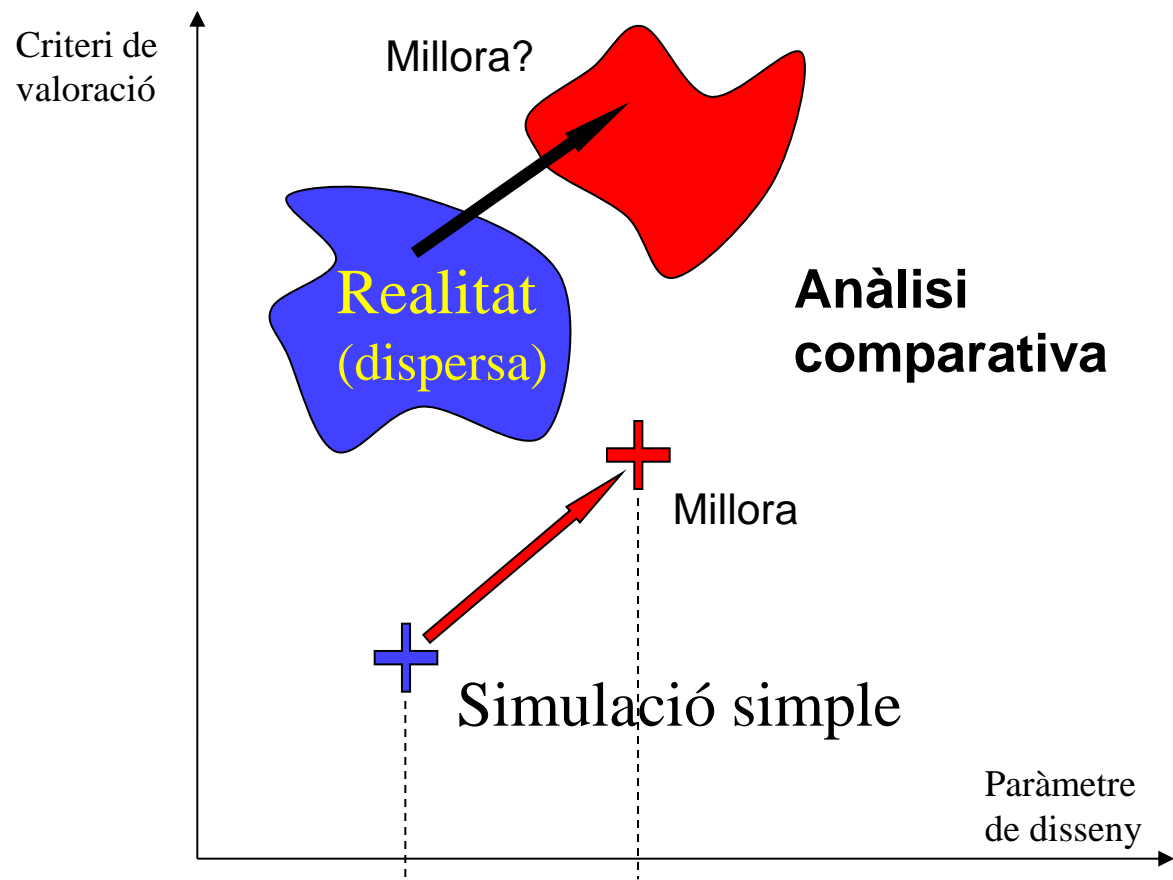
\neq





5. Idealització del Problema

Evitar complicacions innecessàries

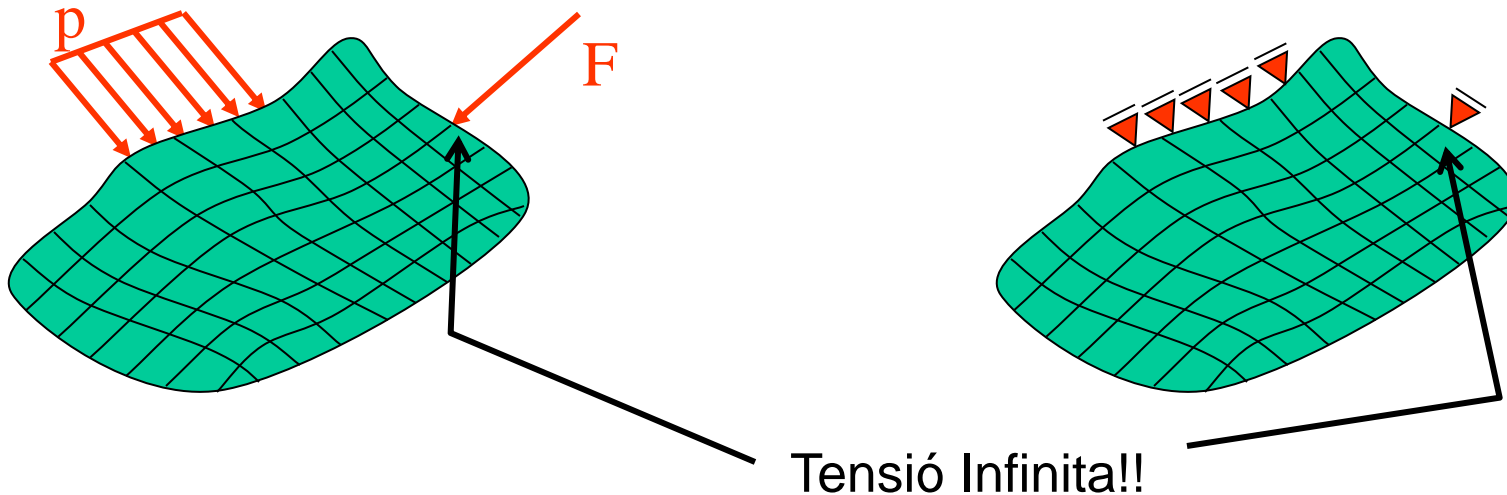


6. Modelat

Construcció de la malla

“definim quins seran els punts d'integració”

MÉS PRECISIÓ \Leftrightarrow MALLA MÉS FINA



No té sentit refinar la malla en punts idealitzats

